

The Project Gutenberg EBook of Sur les Principes Fondamentaux de la Théorie des Nombres et de la Géométrie, by Hermann Laurent

This eBook is for the use of anyone anywhere at no cost and with almost no restrictions whatsoever. You may copy it, give it away or re-use it under the terms of the Project Gutenberg License included with this eBook or online at [www.gutenberg.org](http://www.gutenberg.org)

Title: Sur les Principes Fondamentaux de la Théorie des Nombres et de la Géométrie

Author: Hermann Laurent

Release Date: July 10, 2010 [EBook #33132]

Language: French

Character set encoding: ISO-8859-1

\*\*\* START OF THIS PROJECT GUTENBERG EBOOK LA THÉORIE DES NOMBRES \*\*\*

Produced by Andrew D. Hwang, Laura Wisewell, Chuck Greif  
and the Online Distributed Proofreading Team at  
<http://www.pgdp.net> (The original copy of this book was  
generously made available for scanning by the Department  
of Mathematics at the University of Glasgow.)

#### NOTE SUR LA TRANSCRIPTION

Ce livre a été préparé à l'aide d'images fournies par la  
Département des Mathématiques, Université de Glasgow.

Ce fichier est optimisée pour être lu sur un écran, mais peut être  
aisément reformater pour être imprimer. Veuillez consulter le  
préambule du fichier  $\text{\LaTeX}$  source pour les instructions.

SCIENTIA

Juin 1902.

PHYS. — MATHÉMATIQUE

n° 20.

SUR LES PRINCIPES FONDAMENTAUX  
DE LA THÉORIE DES NOMBRES  
ET DE LA GÉOMÉTRIE

PAR

**H. LAURENT**

# TABLE DES MATIÈRES

---

INTRODUCTION . . . . .	1
Égalité et addition . . . . .	3
Quantités . . . . .	5
Propriétés des quantités . . . . .	5
Les nombres . . . . .	15
Multiplication et division . . . . .	17
Les incommensurables . . . . .	20
Logarithmes . . . . .	26
Conclusion . . . . .	27
La Pangéométrie . . . . .	29
Les espaces et leurs dimensions . . . . .	30
Déplacements euclidiens . . . . .	32
Distances . . . . .	37
Figures égales . . . . .	37
Ligne droite . . . . .	38
Angles . . . . .	40
Trigonométrie . . . . .	46
Perpendiculaire à plusieurs droites . . . . .	47
Contacts . . . . .	50
Longeurs . . . . .	54
Pangéométrie sphérique . . . . .	56
Trigonométrie sphérique . . . . .	58
Pangéométrie hyperbolique . . . . .	59
La géométrie euclidienne . . . . .	63
Résumé . . . . .	66

SUR LES PRINCIPES FONDAMENTAUX  
DE LA THÉORIE DES NOMBRES  
ET DE LA GÉOMÉTRIE

---

INTRODUCTION

---

Pour bien raisonner, on admet généralement avec Pascal qu'il faut prouver ce qui est obscur et n'employer dans les démonstrations que des *axiomes très évidents* ou des propositions déjà accordées ou démontrées.

Mais un axiome très évident pour l'un, ne l'est pas pour un autre, et je crois qu'il vaudrait mieux dire : pour bien raisonner il faut ne faire qu'un petit nombre d'hypothèses, et en chercher les conséquences logiques.

Au fond ces deux manières de concevoir l'art de raisonner sont identiques, car un axiome très évident n'est qu'une hypothèse très plausible. Mais si le fond est le même, la forme est différente au moins dans les applications ; la doctrine des axiomes très évidents a peut-être l'inconvénient de laisser de côté la question de savoir si ces axiomes ne sont pas des conséquences les uns des autres.

Il est curieux d'observer ce qu'est pour nous un axiome très évident ; les hommes de ma génération qui ont suivi les cours de mathématiques spéciales de notre époque, se rappellent, sans doute, que l'on admettait comme un axiome très évident : qu'une courbe continue ayant manifestement une tangente, toute fonction continue devait avoir une dérivée ; une première affirmation nous laissait un peu sceptiques, mais en allant

en avant, la foi nous venait. On connaît le sort du prétendu axiome en question.

Or parmi les axiomes que je pourrais appeler classiques, il y en a une foule qui ne méritent ce nom que parce que nous les avons acceptés sur la simple affirmation d'un maître. On nous a affirmé que le postulat d'Euclide n'était pas évident, nous nous sommes inclinés, on nous a affirmé qu'un angle *retourné* était susceptible de coïncider avec sa position ancienne, nous nous sommes inclinés, on nous aurait affirmé le contraire, nous nous serions également inclinés. L'éducation première a laissé son empreinte, et nous regardons comme des axiomes très évidents, ce que l'on nous a habitués à regarder comme des axiomes très évidents. A l'ancienne définition de l'axiome, *vérité évidente par elle-même*, on doit donc substituer la suivante infiniment plus exacte :

Un axiome est une proposition que l'atavisme, l'éducation, l'autorité du maître nous ont fait accepter comme vraie sans examen, et surtout, sans nous préoccuper de savoir ce qu'est au fond pour nous une vérité.

Il est temps, je crois, de renoncer à la doctrine des axiomes pour lui substituer celle des hypothèses. Dans cet ordre d'idées une vérité est une hypothèse plausible ou une conséquence logique d'hypothèses non contradictoires.

On sait qu'en se plaçant à ce point de vue, le grand géomètre Sophus Lie, qui a été, peut-être sans le vouloir, un grand philosophe, a résolu pour la première fois une question de métaphysique sinon en nous révélant la nature de l'espace, au moins en détruisant les idées erronées qui s'étaient propagées à travers les âges, sur la valeur des axiomes énoncés ou sous-entendus dans Euclide et ses continuateurs.

J'ai essayé comme l'on fait MM. Tannery, Méray, Cossérat de fonder la théorie des nombres sur un petit nombre d'hypothèses, mais en suivant une tout autre voie ; je me suis bien vite aperçu que les axiomes énoncés, ou sous-entendus dans les traités élémentaires d'arithmétique et d'algèbre, pouvaient être considérablement réduits ; et pour cela il m'a suffi de donner une définition nette et précise de la *quantité* et du nombre. J'espère avoir réussi, sans avoir recours à des considérations

transcendantes.

Comme on le voit, je me place au point de vue *utilitaire* ; MM. Méray, Tannery, Cosserat se placent à un point de vue *esthétique*. Pour moi les mathématiques pures ont pour objet l'étude des quantités à l'aide des nombres ; pour MM. Tannery et Cosserat les mathématiques pures sont un exercice de logique.

Je ne ferai, comme on le verra, que quatre hypothèses que je mets franchement en relief :

1° *Je raisonne juste* (hypothèse de tout raisonnement).

2° La quantité sera définie, *je suppose qu'il existe des quantités*.

3° *Il y a des quantités susceptibles d'être divisées en autant de parties égales qu'on voudra* (je définirai la division en parties égales).

4° *Quand une quantité croît sans cesse, (ou décroît sans cesse) sans devenir plus grande (ou plus petite) qu'une quantité fixe, elle a une limite*.

Si l'on fait ces hypothèses, il n'y a plus *d'axiomes très évidents*. On DÉMONTRERA que pour ajouter une somme à une quantité, il suffit de lui ajouter chacune des parties de la somme, qu'une différence ne change pas quand on ajoute ou quand on retranche une même quantité à ses deux termes, etc.

### ÉGALITÉ ET ADDITION

Deux choses qui ne diffèrent en rien l'une de l'autre sont une seule et même chose ; car si elles étaient distinctes, elles diffèreraient par une qualité quelconque, elles n'auraient pas par exemple le même mode d'existence dans le temps ou dans l'espace, la même couleur, etc., permettant de dire qu'elles sont distinctes.

Il est commode de dire que deux objets qui ne diffèrent en rien l'un de l'autre, et qui par suite ne sont qu'un seul même objet, sont des objets identiques.

Des objets matériels ou immatériels, sans être identiques, peuvent avoir une propriété commune ; si alors, par la pensée, on fait abstrac-

tion de toutes leurs autres propriétés, ils ne diffèrent plus en rien, ils deviennent identiques ; et pour exprimer ce fait, on dit qu'ils sont *égaux*.

Deux objets *égaux* sont donc deux objets jouissant d'une même propriété énoncée ou sous-entendue et dont on laisse de côté les autres propriétés.

Il n'y a là rien de conventionnel de ma part, et je ne fais que préciser une idée que nous nous faisons tous de l'*égalité*. L'égalité est une propriété toute relative, et qui dépend du point de vue auquel on se place. Ainsi un cheval est l'égal d'une poule, quand, faisant abstraction de toutes leurs autres propriétés, on les considère l'un et l'autre comme des animaux.

Si des objets A et B sont égaux à un objet C, A et B sont égaux entre eux, par *définition*.

Considérons maintenant des objets A, B, C, D, ..., aussi différents les uns des autres que l'on voudra par leurs propriétés, combinons ces objets entre eux de manière à constituer un objet S, en procédant, toutefois, comme on va le dire. . . . On combinera A avec B, en suivant une certaine règle, et l'on obtiendra un objet B' ; on combinera, en suivant la même règle, B' avec C et l'on obtiendra un objet C' ; et ainsi de suite, jusqu'à ce que l'on trouve un objet S. L'opération finale portera le nom d'*addition*, si le résultat S ne dépend pas de l'ordre suivi en combinant A, B, C, . . . . Si, par exemple, on obtient encore S en combinant B avec A, ce qui donne A'', puis A'' avec D, ce qui donne D'', et ainsi de suite, en employant tous les objets considérés dans la première série d'opérations.

S'il arrive qu'un objet puisse être supprimé sans que le résultat de l'addition en soit altéré, on dira que cet objet est nul ou de nul effet.

On considérera deux objets comme égaux, quand on obtiendra l'un en ajoutant à l'autre un objet nul ; en d'autres termes, on fera abstraction de la propriété qu'ont les objets d'être associés par addition à des objets nuls.

Le résultat de l'addition de A, B, C, . . . portera le nom de *somme* ou *total* des objets A, B, C, . . . ; A, B, C, . . . seront les parties de la somme S.

Donc :

Une somme reste la même, *par définition*, quel que soit l'ordre dans lequel on ajoute ses parties.

### QUANTITÉS

Si un objet A peut s'obtenir en ajoutant à B un objet C qui n'est pas nul, on dit que A est plus grand que B et que C ; B et C sont plus petits que A.

Considérons maintenant une suite illimitée d'objets, A, B, C, . . . . Supposons que ces objets, en vertu d'une règle déterminée, soient susceptibles d'être ajoutés et que la somme de deux quelconques d'entre eux fasse partie de la suite A, B, C, . . . . Supposons en outre que deux quelconques d'entre eux A, B étant choisis arbitrairement, il résulte de la règle adoptée pour faire l'addition, que A soit égal à B, soit plus petit que B ou soit plus grand que B ; le système de ces objets A, B, C, . . . formera un système de *quantités homogènes* ou de *même espèce*.

Ainsi des quantités homogènes sont des choses que l'on peut ajouter, supposer égales entre elles, plus grandes ou plus petites les unes que les autres.

Je fais cette hypothèse, qu'il existe au moins une espèce de quantités homogènes.

### PROPRIÉTÉS DES QUANTITÉS

Soit A une quantité plus grande que B, on obtient par définition A en ajoutant une quantité C à B, on dit que C est la différence entre A et B. Si + est le signe de l'addition, = celui de l'égalité,

$$A = B + C \quad (1)$$

exprimera que A est la somme de B et C, et que C est la différence entre A et B ; on dit que l'on obtient C en soustrayant B de A. — étant le signe de la soustraction, la formule (1) et la suivante

$$A - B = C$$

expriment la même idée.

*Il est facile de prouver que la soustraction ne peut se faire que d'une seule manière.*

C'est-à-dire que si

$$A - B = C, \quad A - B' = C, \quad (1)$$

on a forcément

$$B = B'.$$

En effet, dire que  $A - B = C$ , c'est dire que  $A = B + C$ , de même  $A = B' + C$ , or si  $B$  et  $B'$  ne sont pas égaux, on aura par exemple  $B' = B + \alpha$  et

$$B + C = B + \alpha + C$$

ce qui exprime que  $\alpha$  est de nul effet dans l'addition, c'est-à-dire est nul, et il est permis de ne pas en tenir compte, donc  $B = B'$ . Ainsi les formules

$$A - B = A - B'$$

entraînent la conséquence

$$B = B'.$$

*Il est facile de voir que si*

$$A + B = A + B'$$

*on aura aussi*

$$B = B',$$

car si  $B' = B + \alpha$ , par exemple,

$$A + B = A + B + \alpha$$

ce qui veut dire que  $\alpha$  est nul.

*Si  $A > C$  on aura*

$$A - C + C = A + C - C = A.$$

En effet  $A - C$  est, par définition, une quantité telle qu'en lui ajoutant  $C$ , on a  $A$ ; et  $A + C - C$  est une quantité  $H$  telle que

$$A + C = H + C;$$

donc, en vertu du théorème précédent,  $H = A$ , c. q. f. d.

Soit maintenant  $N$  une quantité plus grande que  $A, B, A + B$  et en général assez grande pour que les opérations  $N - A + B, N - B - A, N - A + B$  soient possibles.

*Par définition on a*

$$N + A + B = N + B + A,$$

*je dis que l'on aura aussi*

$$N - A + B = N + B - A,$$

appelons  $H_1$  et  $H_2$  les deux membres de cette formule, il faut prouver que  $H_1 = H_2$ . Or

$$H_1 + A = (N - A) + B + A = (N - A) + A + B = N - A + A + B = N + B$$

on a ensuite

$$H_2 + A = N + B - A + A = N + B,$$

donc

$$H_1 + A = H_2 + A$$

d'où l'on conclut  $H_1 = H_2$ , c. q. f. d.

*Je dis que l'on aura encore*

$$N - A - B = N - B - A.$$

Appelons  $H_1$  et  $H_2$  les deux membres de cette formule; il faut prouver que  $H_1 = H_2$ . On a

$$H_1 + B = N - A - B + B = N - A;$$

on a ensuite

$$H_2 + B = N - B - A + B = (N - B) - A + B,$$

ou, en vertu du théorème précédent,

$$H_2 + B = (N - B) + B - A = N - B + B - A = N - A;$$

donc

$$H_1 + B = H_2 + B \quad \text{et} \quad H_1 = H_2, \quad \text{c. q. f. d.}$$

*On a*

$$N + A + B = N + (A + B).$$

En effet

$$N + A + B = A + B + N = (A + B) + N = N + (A + B).$$

*On a si*  $A > B$

$$N + A - B = N + (A - B),$$

car

$$N + A - B = A - B + N = (A - B) + N = N + (A - B).$$

*On a si*  $A < B$

$$N + A - B = N - (B - A).$$

Soit  $H_1$  le premier membre,  $H_2$  le second; il faut prouver que  $H_1 = H_2$ . On a

$$H_1 + (B - A) = H_1 + B - A = N + A - B + B - A = N,$$

$$H_2 + (B - A) = N - (B - A) + (B - A) = N,$$

donc  $H_1 = H_2$ , c. q. f. d.

*Comme conséquence*

$$\begin{aligned} N - A + B &= N - (A - B) \quad \text{si} \quad A > B \\ &= N + (B - A) \quad \text{si} \quad B > A. \end{aligned}$$

On a

$$N - A - B = N - (A + B).$$

En effet ajoutant  $(A + B)$  au premier membre, on a

$$N + (A + B) - A - B = N + A + B - A - B = N,$$

en ajoutant  $(A+B)$  au second on a aussi  $N$ , ce qui démontre le théorème.

### GÉNÉRALISATION

Soient  $N, A, B, C, \dots$  des quantités de même espèce, une expression de la forme

$$N \pm A \pm B \pm \dots \pm L \tag{1}$$

est ce que nous appellerons un *polynôme*.

Quand deux polynômes seront égaux, nous dirons qu'ils ont la même valeur.

Les quantités  $N$  et  $\pm A, \pm B, \dots$  considérées avec les signes  $+$  ou  $-$  qui les précèdent seront les *termes* du polynôme (1). Les termes précédés du signe  $+$  et le premier  $N$  seront dits *positifs*, ceux qui sont précédés du signe  $-$  seront dits *négatifs*. Dans un terme, il y a à considérer son *signe*  $+$  ou  $-$  et sa *valeur absolue*, c'est-à-dire la quantité qui entre dans ce terme.

Les quantités positives, négatives ou nulles portent le nom de quantités algébriques.

On appelle *somme* algébrique de deux quantités algébriques, la somme de leurs valeurs absolues, précédée du signe commun, si elles sont de même signe, et leur différence précédée du signe de la plus grande, si elles sont de signes contraires. (On regarde comme précédées du signe  $+$  dans ces définitions les quantités qui ne sont précédées d'aucun signe.)

Une quantité algébrique peut être représentée par une seule lettre, ainsi  $-A$  peut être représenté par  $a$  en sorte que si  $+B$  est représenté

par  $b$  on aura

$$\begin{aligned} a + b &= (-A) + (+B) \\ &= B - A \quad \text{si } B > A \\ &= -(A - B) \quad \text{si } B < A. \end{aligned}$$

Cela posé, reprenons les formules du § précédent :

$$N + A + B = N + (A + B) \tag{1}$$

$$N + A - B = \begin{cases} N + (A - B) & \text{si } A > B \\ N - (B - A) & \text{si } A < B \end{cases} \tag{2}$$

$$N - A - B = N - (A + B) \tag{3}$$

$$N - A - B = N - (A + B). \tag{4}$$

*On peut les résumer en une seule*

$$N + a + b = N + (a + b) \tag{5}$$

*dans laquelle  $a$  et  $b$  sont des quantités algébriques.*

En effet si  $a$  et  $b$  sont positifs et égaux à  $+A$  et  $+B$  on a

$$N + A + B = N + (A + B),$$

c'est la formule (1). Si  $a$  est positif et  $b$  négatif, on peut les représenter par  $+A$  et  $-B$  et la formule (3) revient à

$$N + A - B = N + (A - B)$$

ce qui est la formule (2), etc.

Généralisons. Supposons  $N$  assez grand pour que les opérations que nous allons indiquer soient possibles, et soient  $c, d, \dots$  des quantités algébriques.

Aux deux membres de la formule

$$N + a + b = N + (a + b),$$

ajoutons  $c$ , nous aurons

$$\begin{aligned} N + a + b + c &= N + (a + b) + c \\ &= N + (a + b + c), \end{aligned}$$

aux deux membres ajoutons  $d$ , nous aurons

$$\begin{aligned} N + a + b + c + d &= N + (a + b + c) + d \\ &= N + (a + b + c + d); \end{aligned}$$

donc en général :

$$N + a + b + \dots + l = N + (a + b + \dots + l).$$

Généralisons encore, et appelons quantités algébriques égales, celles qui ont même signe et même valeur absolue.

*Si l'on a*

$$N + \alpha = N + \alpha',$$

*on aura*

$$\alpha = \alpha'.$$

En effet  $\alpha$  et  $\alpha'$  sont de même signe, car si l'on avait  $\alpha = +a$ ,  $\alpha' = -b$  on aurait

$$N + a = N - b$$

ce qui est absurde ; si l'on suppose  $\alpha$  et  $\alpha'$  positifs et égaux à  $a$  et à  $b$  on a

$$N + a = N + b, \quad a = b, \quad \alpha = \alpha', \text{ etc.}$$

*Une somme algébrique  $a + b + \dots + l$  ne change pas de valeur quand on intervertit l'ordre des parties  $a, b, \dots, l$ .*

En effet on a vu que

$$\begin{aligned} N + a + b &= N + (a + b), \\ N + b + a &= N + (b + a), \end{aligned}$$

et comme  $a + b = b + a$ , on a

$$N + a + b = N + b + a.$$

Il en résulte que

$$N + a + b + c = (N + a) + b + c = (N + a) + c + b = N + a + c + b,$$

donc

$$\begin{aligned} N + a + b + c + d &= (N + a + b) + c + d \\ &= (N + a + b) + d + c = N + a + b + d + c, \end{aligned}$$

et en général si  $N$  est assez grand

$$N + a + b + \dots + k + l = N + a + \dots + l + k.$$

*Un polynôme ne change donc pas de valeur quand on intervertit l'ordre de ses deux derniers termes.*

En ajoutant successivement  $m, n, \dots$  aux deux membres de la formule précédente, on a

$$N + a + b + \dots + k + l + m + \dots = N + a + \dots + l + k + m + \dots$$

ce qui prouve que : un polynôme ne change pas de valeur quand on intervertit l'ordre de deux termes consécutifs quelconques, pourvu que l'on ne touche pas au premier, et par suite *on peut placer les termes dans un ordre arbitraire, pourvu que le premier reste à sa place (et soit assez grand)*. Maintenant on a

$$\begin{aligned} N + a + b &= N + (a + b), \\ N + a + b + c &= N + (a + b) + c = N + (a + b + c), \end{aligned}$$

et en général

$$N + a + b + \dots + l = N + (a + b + \dots + l). \quad (1)$$

Or on a vu que l'on pouvait intervertir l'ordre des termes d'un polynôme, donc

$$N + a + b + \dots + l = N + l + b + \dots + a, \quad (2)$$

et

$$N + l + b + \dots + a = N + (l + b + \dots + a), \quad (3)$$

donc (1), (2) et (3) donnent

$$N + (a + b + \dots + l) = N + (l + b + \dots + a),$$

et en vertu de la formule  $\alpha = \alpha'$ , qui résulte de  $N + \alpha = N + \alpha'$ , on a

$$a + b + \dots + l = l + b + \dots + a.$$

Nous généraliserons encore en donnant le nom de *polynôme* à une somme algébrique quelconque, et nous pourrons dire que *la valeur d'un polynôme quelconque ne dépend pas de l'ordre de ses termes*.

Pour trouver la valeur d'un polynôme on peut grouper les termes arbitrairement, ainsi on a par exemple

$$a + b + c + d + \dots + l = a + (b + c + d) + \dots + (k + l),$$

en effet

$$a + b + c + d = b + c + d + a = (b + c + d) + a = a + (b + c + d),$$

par suite

$$\begin{aligned} a + b + c + \dots + k + l &= a + (b + c + d) + \dots + k + l \\ &= a + (b + c + d) + \dots + (k + l), \text{ etc.} \end{aligned}$$

Il en résulte que pour trouver la valeur d'un polynôme, on peut, en appelant  $p_1, p_2, \dots$  les termes positifs,  $n_1, n_2, \dots$  les termes négatifs, l'écrire ainsi

$$(p_1 + p_2 + \dots) + (n_1 + n_2 + \dots),$$

et l'on voit que sa valeur s'obtient en ajoutant, d'une part les termes positifs, d'autre part les termes négatifs, puis en faisant la différence des sommes trouvées et en donnant au résultat le signe de la plus grande.

Donc pour changer le signe d'un polynôme, il suffira de changer les signes de tous ses termes.

Soustraire une quantité algébrique  $b$  d'une autre  $a$ , c'est trouver une quantité  $c$  telle que

$$a = b + c, \quad \text{alors on écrit} \quad c = a - b.$$

Pour faire la soustraction, il suffit de changer le signe de la quantité à soustraire et de l'ajouter à l'autre, ainsi par exemple :

$$A - (-B) = A + B$$

car

$$A + B - B = A.$$

La soustraction algébrique ne peut se faire que d'une seule manière, car si l'on avait

$$c = a - b, \quad c' = a - b$$

on aurait

$$\begin{aligned} a = b + c, \quad a = b + c' \\ b + c = b + c' \end{aligned}$$

ce qui n'est possible, comme on l'a vu, que si  $c = c'$ .

Pour ajouter un polynôme, ou une somme algébrique à une quantité algébrique, il suffit de lui ajouter successivement les parties de la somme.

Car

$$a + (b + c + d) = (b + c + d) + a = b + c + d + a = a + b + c + d.$$

*Corollaire.* — Pour retrancher une somme, il suffit de changer les signes de ses termes et de les ajouter successivement.

M. Méray, dans son remarquable opuscule sur les quantités dirigées, appelle somme de quantités algébriques la différence des valeurs absolues des sommes des termes positifs et négatifs, précédée du signe de la plus grande de ces sommes ; il en conclut qu'une somme, en vertu de cette définition, ne change pas de valeur quand on intervertit l'ordre de ses termes, mais il reste à prouver que

$$a + b + c + d = \left( ((a + b) + c) + d \right)$$

ce qui résulte pour nous de notre définition du mot somme.

### LES NOMBRES

On appelle *nombre* une locution et un signe qui la représente, destiné à désigner avec précision une quantité et toutes celles qui lui sont égales, de manière à les distinguer nettement de celles qui sont plus grandes ou plus petites.

Il reste à prouver que cette désignation est possible <sup>(1)</sup>.

Si l'on choisit arbitrairement une quantité bien connue, parmi toutes les quantités de même espèce, et si on l'appelle *unité*, toutes les quantités égales à l'unité seront désignés ou, comme l'on dit, mesurées par le mot *un*.

On a donné des noms à toutes les quantités résultant de l'addition d'unités, on a ainsi créé les mots un, deux, trois... et des signes 1, 2, 3, ... qui sont les *nombres entiers*. Je n'ai pas à examiner ici les règles que l'on a suivies pour soulager la mémoire et retenir les noms des nombres entiers, il y en a un grand nombre, et on pourrait en imaginer beaucoup d'autres. Je retiens seulement cette définition :

Les *nombres entiers* sont ceux qui servent à désigner avec précision, ou comme l'on dit à *mesurer* les quantités obtenues en ajoutant des unités.

---

<sup>1</sup>M. Tannery a reproché à notre définition, que le mot quantité n'était pas défini, j'espère que, s'il veut jeter un coup d'œil sur ce qui précède, il voudra bien reconnaître que le mot *quantité*, au contraire, est parfaitement défini.

Bien que nous n'ayons pas encore montré comment on pouvait désigner les quantités ne résultant pas de l'addition d'unités, nous pouvons poser les définitions et remarques suivantes :

*Mesurer* une quantité c'est dire comment on peut la former avec l'unité et la distinguer de celles qui ne lui sont pas égales, au moyen d'un *nombre*. Deux nombres  $a, b$  sont *égaux*, quand ils représentent des quantités égales, et par suite cette égalité entre deux nombres est une identité.

Un nombre  $a$  est plus grand ou plus petit qu'un autre  $b$ , quand la quantité mesurée par  $a$  est plus grande ou plus petite que la quantité mesurée par  $b$ .

La somme des nombres  $a, b, c, \dots$  est le nombre qui mesure la somme des quantités mesurées par  $a, b, c, \dots$  <sup>(2)</sup>.

Les nombres sont d'après ces définitions de véritables *quantités* puisque leur égalité et leur addition est définie.

La soustraction des quantités ayant été définie, celle des nombres l'est.

Je n'examine pas ici comment on procède pour effectuer réellement l'addition et la soustraction des nombres, il me suffit de concevoir la possibilité de ces opérations en ce qui concerne les nombres entiers. Il ne sera peut-être pas inutile de montrer que le prétendu axiome :

*Une différence de deux quantités ne change pas quand à chacune d'elles on ajoute une même quantité*

se démontre très facilement de la manière suivante.

Soit  $d$  la différence de  $a$  et  $b$ , en sorte que

$$a = b + d;$$

en ajoutant une même quantité  $q$  à  $a$  et à  $b + d$  on a

$$a + q = b + q + d,$$

---

<sup>2</sup>Les définitions que l'on donne dans les traités d'arithmétique n'ont pas de sens. Exemple : «Ajouter plusieurs nombres, c'est les réunir en un seul qui les contienne tous !!», il faudrait dire comment on les réunit.

et, comme on obtient  $a + q$  en ajoutant  $d$  à  $b + q$ ,  $d$  est par définition la différence entre  $a + q$  et  $b + q$ , comme elle l'est entre  $a$  et  $b$ .

Du reste cette proposition a été déjà implicitement démontrée, puisque nous avons prouvé que l'on pouvait grouper arbitrairement les termes d'une somme algébrique, ainsi

$$(a + q) - (b + q) = a + q - b - q = a + q - q - b = a - b.$$

### MULTIPLICATION ET DIVISION

Multiplier une quantité par un nombre entier, c'est ajouter autant de quantités égales à celle-là qu'il y a d'unités dans l'entier considéré.

La quantité que l'on ajoute ainsi à ses égales est le *multiplie*nde, l'entier égal au nombre de parties ainsi ajoutées porte le nom de multiplicateur, et la somme obtenue est le *produit* du multipliende par le multiplicateur, qui sont les *facteurs* du produit.

Le multipliende peut d'ailleurs être un nombre.

On démontre dans tous les traités d'arithmétique, qu'un produit de plusieurs nombres (facteurs) ne change pas quand on intervertit l'ordre de ces nombres.

La multiplication est donc à un double point de vue une addition : 1° par définition ; 2° parce que c'est une opération indépendante de l'ordre dans lequel on combine les objets sur lesquels on opère. Si l'on se place au second point de vue, l'objet nul est le nombre *un*, car multiplier une quantité ou un nombre par *un*, c'est ne lui faire subir aucun changement.

Cette remarque a une très haute portée philosophique, et bien qu'elle ne soit pas faite, et pour cause, dans les traités d'arithmétique, elle donne la clef et la véritable origine des logarithmes. Je dis *et pour cause*, car ces traités ne donnant pas la véritable définition de l'addition, il était impossible d'en tirer une conclusion.

On apprend dans les traités d'arithmétique, à abréger l'opération que nous avons appelée multiplication ; mais ceci n'ayant rien d'essentiel pour le but que nous poursuivons, nous laisserons cette question de côté.

Diviser une quantité (qui le plus souvent est un nombre) appelée *dividende*, par un nombre appelé *diviseur*, c'est trouver deux nombres, l'un appelé *quotient*, qui indique combien on peut ajouter de quantités égales au diviseur pour former une somme au plus égale au dividende, et l'autre appelée *reste* qui indique ce qui reste.

Ceci sera plus clair en indiquant la manière d'opérer : soit  $D$  le dividende et  $d$  le diviseur on retranchera  $d$  de  $D$ . Si le reste est supérieur à  $d$  on en retranchera encore  $d$ , et ainsi de suite, jusqu'à ce que le reste  $R$  soit moindre que  $d$ ;  $R$  est alors le reste cherché et si l'on a effectué  $q$  soustractions,  $q$  sera le quotient, le dividende  $d$  est donc égal à ce que l'on en a retranché, c'est-à-dire  $d \times q$  plus le reste.

Le lecteur connaît la définition des mots multiple, diviseur, etc., il sait faire une division; mais peu importe, pour faire une division on peut suivre la méthode classique, on peut en suivre d'autres, cela m'est indifférent, je demande seulement qu'on m'accorde la possibilité de faire l'opération.

#### LES NOMBRES FRACTIONNAIRES

Supposons que l'on ait choisi une unité, et soit  $A$  une quantité à mesurer, c'est-à-dire que l'on éprouve le besoin de désigner avec précision, ainsi que celles qui lui sont égales, de manière à ne pas la confondre avec les autres.

Si  $A$  résulte de l'addition d'unités, nous savons comment on peut le mesurer au moyen d'un nombre entier; mais s'il en est autrement voici comment on pourra procéder, sans affirmer pour le moment que l'on réussira.

On partagera l'unité en parties égales, c'est-à-dire que l'on considérera des quantités égales qui ajoutées donneront l'unité, ces parties sont dites *aliquotes*.

Commençons par partager l'unité en deux parties égales, s'il arrive que  $A$  se compose d'un certain nombre  $n$  de ces parties, on dira que  $A$  est mesuré par le nombre  $\frac{n}{2}, \dots$ . S'il faut partager l'unité en  $m$  parties

égales pour que A résulte de l'addition d'un certain nombre  $n$  de ces parties, on dira que A est mesuré par le nombre  $\frac{n}{m}$ . Ces nombres tels que  $\frac{n}{m}$  sont des nombres fractionnaires (ou des fractions proprement dites s'ils sont moindres que un).

Ainsi on appelle *nombres fractionnaires*, ceux qui mesurent les quantités obtenues en ajoutant des parties aliquotes de l'unité <sup>(1)</sup>.

Les propriétés des fractions résultant de cette définition, je n'ai pas à répéter ici ce qui est fort bien dit ailleurs, mais je dois encore définir la multiplication pour ne laisser aucun équivoque entre le lecteur et moi.

Multiplier une quantité par une fraction  $\frac{m}{n}$ , c'est prendre  $m$  fois la  $n^{\text{e}}$  partie de cette quantité; en faisant cela le produit est formé avec le multiplicande, comme le multiplicateur est formé avec l'unité.

Remarque, au fond et en soi, parfaitement inutile; mais qu'il faut signaler, parce que l'on a voulu faire de cette propriété la définition même de la multiplication, ce qui est absurde, et en effet on peut former le multiplicateur de bien des manières avec l'unité, et en formant le produit d'une quelconque de ces manières avec le multiplicande on n'obtient pas toujours le même résultat.

Je ne voudrais pas abandonner ce sujet, sans critiquer une nouvelle définition des nombres fractionnaires qu'on tend à imposer à la nouvelle génération.

Il y a, comme je l'ai déjà fait observer ailleurs, deux espèces de définitions. Les unes ont pour but de fixer dans l'esprit une notion que nous possédons antérieurement, notion très claire, mais qui a besoin d'être précisée par une propriété fondamentale de l'objet défini, parce que cette propriété doit entrer comme élément dans un raisonnement.

La définition n'a alors rien d'arbitraire, et dans cette définition on doit immédiatement reconnaître l'objet défini. Si je définis le mot fraction; comme nous savons tous ce que c'est qu'une fraction, il ne faut pas que j'en donne une définition bizarre, qui, bien que logiquement

---

<sup>1</sup>Je fais ici une hypothèse : *L'unité peut être partagée en parties égales, s'il n'en est pas ainsi, notre théorie n'a pas sa raison d'être.*

exacte, nous donne *a priori* une idée qui semble en contradiction avec la réalité.

Sans doute, logiquement on peut dire qu'une fraction est l'ensemble de deux entiers séparés par une barre <sup>(2)</sup>, donner à l'ensemble de ces deux nombres certaines propriétés fondamentales qui en feront ce que nous savons être une fraction.

On peut encore considérer  $\frac{a}{b}$  comme une sorte de symbole imaginaire, ne représentant qu'une impossibilité, mais pouvant entrer utilement dans les calculs.

Ces considérations, logiquement exactes, sont antiphilosophiques et ne peuvent que fausser l'esprit des malheureux auxquels on les enseigne.

*Une remarque qui a son importance.* — Nous avons déjà observé que la multiplication est une des formes de l'addition, donc à tout théorème relatif à l'addition correspond un théorème relatif à la multiplication, qu'il n'y a pas besoin de démontrer de nouveau. Exemple :

Une différence ne change pas quand on ajoute une même quantité à ses deux termes. Donc :

Un quotient ne change pas quand on multiplie le dividende et le diviseur par un même nombre.

Dans la théorie de la multiplication les nombres négatifs sont les nombres de la forme  $\frac{1}{a}$ .

Il y a en arithmétique comme en géométrie une loi de dualité.

## LES INCOMMENSURABLES

Il me reste à montrer comment on peut mesurer les quantités que l'on ne peut pas obtenir en ajoutant des parties aliquotes de l'unité, et j'aurai pleinement justifié la définition que j'ai donnée du *nombre*.

---

<sup>2</sup>Quelques personnes, parmi lesquelles se trouvaient des dames dont la culture intellectuelle avait été très développée, et auxquelles je racontais que plusieurs professeurs définissaient de cette manière les nombres fractionnaires, non seulement ont refusé de me croire, mais même ont pensé que je voulais les mystifier.

Je vais avoir besoin de deux principes qui pour être compris n'ont pas besoin d'être démontrés, mais seulement expliqués.

Une quantité qui varie de manière à différer d'une quantité fixe, d'aussi peu que l'on veut, a cette quantité fixe pour limite. Ainsi on appellera *limite* d'une quantité variable  $V$ , une quantité fixe  $L$  telle que la valeur absolue de  $V - L$  puisse être supposée moindre que toute quantité donnée, si petite que l'on voudra. Suivant les cas  $V$  pourra ou ne pourra pas devenir rigoureusement égale à  $L$ .

*Premier principe.* — Si  $N$  est un nombre croissant de manière à dépasser tout nombre donné,  $\frac{1}{N}$  aura zéro pour limite. Car  $\frac{1}{N}$  décroît quand  $N$  croît et quand  $N$  est un entier suffisamment grand la  $N^{\text{e}}$  partie de l'unité devient aussi petite que l'on veut et moindre qu'une quantité donnée  $\delta$ ; en effet en ajoutant  $\delta$  un nombre de fois suffisamment grand à lui-même on finira par obtenir un nombre qui dépassera l'unité, en appelant  $N$  le nombre de fois on aura

$$N\delta > 1, \quad \delta > \frac{1}{N}.$$

*Deuxième principe.* — Si une quantité variable  $V$  croît sans cesse en restant inférieure à une quantité fixe  $A$  elle a une limite au plus égale à  $A$ , qui est la plus petite des quantités qu'elle ne peut surpasser. De même quand une quantité  $V$  décroît sans cesse en restant supérieure à une quantité fixe  $A$  elle a une limite au moins égale à  $A$ .

Soit maintenant  $A$  une quantité qui ne puisse s'obtenir en ajoutant des parties aliquotes de l'unité. Partageons l'unité en  $m$  parties égales si c'est possible,  $A$  sera compris par exemple entre  $n$  fois et  $n + 1$  fois l'unité. Si  $m$  est assez grand, on aura une idée assez exacte de cette quantité  $A$  et de celles qui lui sont égales, en disant qu'elle est comprise entre deux quantités mesurées par les nombres  $\frac{n}{m}$  et  $\frac{n+1}{m}$ ; et si l'on appelle commensurables tous les nombres entiers ou fractionnaires, on donnera une idée exacte de la quantité  $A$  si l'on indique un moyen de calculer tous les nombres commensurables, mesurant les quantités plus grandes que  $A$  et les nombres commensurables mesurant les quantités

plus petites que A. Et en effet si l'on fait cela, on apprendra que A est compris entre les  $n m^{\text{mes}}$  et les  $n+1 m^{\text{mes}}$  de l'unité,  $m$  étant aussi grand que l'on voudra, et si l'on pouvait ainsi définir une autre quantité B différente de A, la différence  $B - A$  serait par exemple supérieure à la  $\mu^{\text{me}}$  partie de l'unité et B ne pourrait pas alors être compris entre les  $\nu$  et les  $\nu + 1 \mu^{\text{mes}}$  parties de l'unité, si A était déjà compris entre ces limites.

Le nombre ainsi défini est dit incommensurable, et A est incommensurable avec l'unité.

En général deux quantités sont incommensurables, ou n'ont pas de commune mesure, quand l'une étant prise pour unité, l'autre est incommensurable avec celle-ci.

On peut dire qu'un nombre incommensurable est la limite commune aux nombres commensurables plus grands et plus petits que lui ; les premiers allant en décroissant et les seconds en croissant sans cesse.

#### CALCUL DES NOMBRES INCOMMENSURABLES

L'addition et la soustraction ont été définies d'une manière générale, mais la multiplication et la division n'ont encore aucun sens quand il s'agit de nombres incommensurables.

On définira comme il suit le produit  $a \times b$ . Soient  $\alpha$  et  $\alpha'$  deux nombres commensurables et variables tels que

$$\alpha < a < \alpha',$$

le premier croissant, le second décroissant, et ayant pour limite commune  $a$ . Soient  $\beta$  et  $\beta'$  deux nombres choisis d'une manière analogue relativement à  $b$ .

Les produits  $\alpha\beta$  et  $\alpha'\beta'$  iront, le premier en croissant, le second en décroissant ; un nombre  $\alpha\beta$  restant constamment inférieur à un quelconque, bien déterminé, des nombres  $\alpha'\beta'$  ; les nombres  $\alpha\beta$  ont donc une limite, les nombres  $\alpha'\beta'$  aussi, pour une raison analogue. Ces deux

limites sont égales ; en effet, posant

$$\alpha' = \alpha + x, \quad \beta' = \beta + y,$$

on a

$$\alpha'\beta' = \alpha\beta + \alpha y + \beta x + xy.$$

Or  $x$  et  $y$  diffèrent de zéro d'aussi peu que l'on veut,  $\alpha'\beta'$  et  $\alpha\beta$  diffèrent l'un de l'autre d'aussi peu que l'on voudra, et par suite de la limite de  $\alpha\beta$ , par exemple ;  $\alpha\beta$  et  $\alpha'\beta'$  ont donc la même limite.

Le quotient de  $\frac{a}{b}$  pourra être défini comme un nombre  $q$ , tel que

$$a = bq;$$

il faut montrer que  $q$  existe, or il est facile de prouver en raisonnant comme tout à l'heure que  $\frac{\alpha}{\beta'}$  et  $\frac{\alpha'}{\beta}$  ont même limite  $q$ . Si l'on pose  $\alpha = a - x$ ,  $\beta = b + y$ ,  $\frac{\alpha}{\beta'} = q - z$ , on a

$$a - x = (b + y)(q - z)$$

et on voit que  $bq$  différera de  $a$  d'aussi peu que l'on voudra, donc, etc.

Il reste à montrer comment sachant approcher de  $a, b$  autant que l'on voudra, on pourra obtenir  $a + b$ ,  $a - b$ ,  $ab$ ,  $\frac{a}{b}$  avec telle approximation que l'on voudra. C'est là une question qui dépend de la théorie générale des erreurs et que j'ai traitée d'une manière entièrement rigoureuse, dans ma *Théorie des opérations financières*. (Encyclopédie des aide-mémoire Léauté.)

Étant donné un système quelconque de quantités, il peut arriver que, après avoir choisi une unité, et procédé comme nous venons de le faire, on ne parvienne à désigner avec précision qu'une partie seulement des quantités considérées. Ce système est alors ce que l'on appelle un système de quantités *complexes*, et pour les désigner toutes on est obligé de choisir une, quelquefois deux, trois... nouvelles unités ; en appelant

$i, j, \dots$  ces unités, toute quantité pourra se représenter par un symbole tel que

$$ai + bj + \dots$$

$i, j, \dots$  sont alors des unités complexes, mais je n'ai pas l'intention d'entrer ici dans les détails d'une théorie exposée ailleurs.

### ENCORE LES QUANTITÉS ALGÈBRIQUES

On a pu remarquer comment, même avant l'introduction de l'idée de nombre, s'imposait la notion de quantité négative, pour simplifier le langage. Nous allons retrouver le besoin de faire usage des quantités algébriques en étudiant les opérations sur les polynômes. On a souvent besoin de multiplier une expression de la forme

$$N \pm A \pm B \pm \dots$$

par une autre de même forme,  $N, A, \dots$  désignant des nombres et l'opération indiquée étant arithmétiquement possible. Si l'on se place au point de vue didactique, il ne sera pas inutile de considérer deux cas particuliers très simples  $(4-3)(5+2)$ ,  $(4-3)(5-2)$  et de montrer comme il serait difficile d'arriver directement à une règle générale, sans faire usage du langage algébrique pour condenser le raisonnement, même en supposant les termes des polynômes que l'on considère entiers.

Sur ces exemples, on fera entrevoir la simplification introduite en faisant la convention suivante :

On appelle produit de deux quantités algébriques le produit de leurs valeurs absolues précédé du signe commun, si elles sont de mêmes signes, et du signe  $-$  si elles sont de signes contraires. Alors pour multiplier deux binômes dans le cas où les valeurs absolues des termes sont entières, on voit qu'il suffit de multiplier chaque terme du premier algébriquement par chaque terme du second, et d'ajouter, algébriquement aussi, les produits obtenus.

Cet énoncé en condense un grand nombre d'autres, et il est alors naturel de se demander si l'on ne pourrait pas profiter des avantages

que l'on a retirés des considérations algébriques pour simplifier l'énoncé des résultats, et appliquer ces considérations à la démonstration des théorèmes découverts, et même à leur généralisation.

En se plaçant sur le terrain algébrique, on observera que pour multiplier un polynôme quelconque positif

$$N + a + b + c + d,$$

où  $N$  est suffisamment grand, par un entier, 3, cela revient à former

$$N + a + b + c + d + N + a + b + c + d + N + a + b + c + d,$$

ou  $3N + 3a + 3b + 3c + 3d$ . Pour le multiplier par une fraction  $\frac{3}{4}$ , il faudra en prendre les  $\frac{3}{4}$ , le quart est

$$\frac{N}{4} + \frac{a}{4} + \frac{b}{4} + \frac{c}{4} + \frac{d}{4},$$

car en multipliant ce nouveau polynôme par 4, on reproduit l'ancien, et les  $\frac{3}{4}$  du polynôme seront

$$\frac{3}{4}N + \frac{3}{4}a + \frac{3}{4}b + \frac{3}{4}c + \frac{3}{4}d.$$

Si le multiplicateur est incommensurable, on le remplacera par un des nombres  $\alpha$  commensurables plus petits que lui, puis par un des nombres commensurables plus grands et on passera aux limites. On verra ainsi que pour multiplier un polynôme représentant un nombre positif (arithmétique) par un nombre, il suffit de multiplier les termes du polynôme par ce nombre en conservant les signes, c'est-à-dire en observant la règle des signes.

Si l'on veut multiplier un polynôme négatif par un terme positif, on multipliera la valeur absolue du polynôme par le monôme et on changera le signe du résultat. Or il est facile de voir qu'en opérant ainsi

cela revient à multiplier chaque terme du polynôme par le monôme, algébriquement, et à ajouter algébriquement les produits ainsi obtenus, etc.

La considération des quantités négatives s'impose donc, comme moyen d'abrèger le langage et avant toute interprétation concrète; et sans qu'il soit nécessaire de faire de nouvelles hypothèses ou de poser des axiomes très évidents.

### LES LOGARITHMES

Les nombres sont de deux manières différents des quantités. On peut en effet définir leur addition de deux manières différentes : 1° à la manière ordinaire; 2° en considérant leur multiplication comme une addition, car un produit jouit de la propriété

$$\begin{aligned} abc\dots &= bca\dots = \dots \\ abcd\dots &= ((ab)c)d\dots; \end{aligned}$$

l'objet nul est le nombre 1.

En se plaçant à ce second point de vue on peut représenter les nombres, les *mesurer* comme il suit :

On choisira l'un d'eux B pour unité, on lui donnera, pour éviter toute confusion, le nom de base et on le représentera par le symbole [1], alors 1 étant l'objet nul sera représenté par [0]. Les nombres entiers résultant de l'addition d'unités, à savoir B<sup>2</sup>, B<sup>3</sup>, ... seront représentés par [2], [3], ...

Si un nombre A ne résulte pas de l'addition d'unités (n'est pas de la forme B<sup>n</sup>), on partagera <sup>(1)</sup> l'unité B en *n* parties égales à  $\sqrt[n]{B}$  et l'on dira que A contient *m* de ces parties et est égal à  $\sqrt[n]{B^m}$ ; il sera représenté par  $\begin{bmatrix} m \\ n \end{bmatrix}$ .

---

<sup>1</sup>Il faudra d'ailleurs démontrer que les nombres considérés au second point de vue, peuvent être partagés en parties égales, où que  $\sqrt[n]{B}$  existe.

Il pourra arriver que  $A$  ne puisse pas se mettre sous la forme  $\sqrt[n]{B^m}$ , alors le nombre représentant  $A$  sera incommensurable (dans la nouvelle numération) et on le définira à la manière ordinaire.

Les nombres  $[p]$  sont ce qu'on appelle les logarithmes des nombres  $p$  dans la base  $B$  et l'on a

$$[p] + [q] = [pq];$$

toute la théorie des logarithmes est contenue dans cette formule (2).

#### CONCLUSION

En précisant la notion de quantité et la notion de nombre, en donnant de bonnes définitions de ces mots, on assoit, on voudra bien le reconnaître, la théorie des nombres ou la mathématique pure, sur des bases absolument inébranlables. Et maintenant si l'on veut comparer notre manière de procéder avec celles de MM. Tannery, Méray, Cosserat, on voudra bien accorder que la nôtre :

1° Est toute aussi simple et certainement plus accessible aux jeunes intelligences qui ne sont pas familiarisées avec les subtilités de la métaphysique ;

2° Qu'en refusant de fonder la théorie des nombres sur la considération de la quantité, on n'en est pas moins obligé, pour arriver à faire une application quelconque, à refaire au moins l'équivalent de ce que nous avons commencé par faire au début ;

3° Que la mathématique étant la science qui a pour but l'étude des relations exactes et nécessaires de grandeur, de forme et de position des objets accessibles à nos sens, MM. Tannery, Méray et Cosserat ne font pas des mathématiques, mais de la métaphysique. C'est évidemment leur droit ; je leur accorde même qu'au point de vue purement esthétique, leurs méthodes ont certainement quelque chose de séduisant, mais elles sont beaucoup moins simples et moins naturelles que

---

<sup>2</sup>Si l'on veut changer de base, c'est-à-dire d'*unité*, il faudra multiplier les nombres  $[n]$  par le nombre  $\left[\frac{1}{B}\right]$ .

les nôtres et, sous une apparente rigueur, elles ne sont peut-être pas toujours à l'abri de quelques objections.

Si le lecteur pouvait m'adresser la parole, il me demanderait sans doute, si chargé d'enseigner les mathématiques, mon cours serait conforme à l'exposé de mes doctrines.

A cela je répondrai que si j'enseignais l'arithmétique à de jeunes enfants qui n'ont jamais fait de mathématiques, je leur définirais la quantité et le nombre, le nombre entier et le nombre fractionnaire comme je l'ai fait, mais je postulerais la plupart des théorèmes que j'ai démontrés.

Que si j'avais, au contraire, à faire un cours d'algèbre, je croirais devoir me conformer entièrement à la façon dont je viens de présenter les choses.

Que si enfin j'avais à professer un cours d'arithmologie ou d'arithmétique supérieure, je croirais devoir me placer au point de vue de M. Tannery, car dans un pareil cours le nombre entier joue le rôle prépondérant, et tout gravite autour de lui.

---

# LA PANGÉOMÉTRIE

## ET L'EXAMEN DES PRINCIPES FONDAMENTAUX DE LA GÉOMÉTRIE

On donne le nom de pangéométrie à une branche de l'analyse pure, qui emprunte à la géométrie son langage figuré pour exprimer des idées et des faits qu'il serait trop long de traduire en langage ordinaire.

Dans ce qui va suivre, les mots tels que point, ligne, surface, déplacement, vont recevoir une signification tout autre qu'en géométrie, je prie le lecteur de vouloir bien faire table rase de toutes les notions qu'il a pu acquérir dans cette science, et de ne pas s'étonner des contradictions qui pourraient se présenter tout d'abord entre nos théories et ses préjugés.

Je dois aussi le prévenir que le sinus, le cosinus et la tangente d'un nombre seront pour nous, non pas les *lignes* dont on étudie les propriétés en trigonométrie, mais les fonctions définies par les séries convergentes

$$\begin{aligned}\sin x &= x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots, \\ \cos x &= 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots, \\ \operatorname{tg} x &= \frac{\sin x}{\cos x}.\end{aligned}$$

On démontre, *sans faire usage de considérations géométriques*, (voir mon *Traité d'Analyse*, t. I), que ces fonctions jouissent de toutes les propriétés dont jouissent les lignes qui portent le même nom en trigonométrie;  $\pi$  est alors le nombre défini par la série

$$\pi = 4 \left( 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \dots \right)$$

que l'on peut transformer de bien des manières.

## LES ESPACES ET LEURS DIMENSIONS

Un ensemble de  $n$  quantités  $x_1, x_2, \dots, x_n$  sera ce que nous appellerons les coordonnées d'un *point* dans l'espace à  $n$  dimensions.

Si les coordonnées  $x_1, x_2, \dots, x_n$  d'un point sont fonctions d'un seul paramètre  $t$  (qui pourra être l'une des variables  $x_1, \dots, x_n$ ) on dit que le point  $x_1, x_2, \dots, x_n$  décrit une *ligne* ou une *variété*, ou même un *espace* à une dimension.

Si  $x_1, x_2, \dots, x_n$  sont fonctions de deux variables indépendantes,  $t, u$ , on dit que le point  $x_1, \dots, x_n$  décrit une *variété* ou encore un espace à deux dimensions.

Si  $x_1, x_2, \dots, x_n$  sont fonctions de trois variables indépendantes, on dit que le point  $x_1, x_2, \dots, x_n$  décrit une variété ou un espace à trois dimensions, etc.

Une variété à  $n - 1$  dimensions est une *surface* ou une *hypersurface*. Un espace à plus de trois dimensions est un *hyperespace*.

Une variété à  $p$  dimensions est continue quand les coordonnées d'un quelconque de ses points sont fonctions continues des  $p$  paramètres dont elles dépendent.

Une *figure* est un ensemble de variétés de mêmes dimensions ou de variétés de dimensions différentes (points, lignes, etc. . .).

On dit qu'une variété est le *lieu* des points dont les coordonnées satisfont à son équation, ou à ses équations. On dit aussi qu'une variété *contient* les points dont les coordonnées satisfont à ses équations. On dit enfin que des variétés se *coupent* ou se *rencontrent* quand elles contiennent un ou plusieurs points communs en nombre fini ou infini, formant une variété à 0 ou à un nombre quelconque de dimensions.

Si les coordonnées d'un point  $x_1, x_2, \dots, x_n$  sont fonctions linéaires d'un même paramètre variable  $t$ , qui peut être l'une des variables  $x_1, x_2, \dots, x_n$ , on dit que ce point décrit une *droite*. Ainsi les équations

$$x_1 = a_1 + \alpha_1 t, \quad x_2 = a_2 + \alpha_2 t, \quad \dots, \quad x_n = a_n + \alpha_n t$$

représentent une *droite*. Ces équations peuvent se mettre sous la forme

$$\frac{x_1 - a_1}{\alpha_1} = \frac{x_2 - a_2}{\alpha_2} = \dots = \frac{x_n - a_n}{\alpha_n}$$

ou même

$$\frac{x_1 - a_1}{k\alpha_1} = \dots = \frac{x_n - a_n}{k\alpha_n}.$$

Elles sont toujours satisfaites pour les mêmes valeurs de  $x_1, \dots, x_n$  et représentent toujours la même droite, le même lieu.  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$  sont les *coefficients directeurs* de la droite.

Une équation du premier degré représente ce que l'on appelle un plan.

La théorie des équations linéaires peut se résumer comme il suit, en employant le langage de la pangéométrie :  $n$  équations linéaires entre  $n$  inconnues ont en général une solution et une seule.

$n$  plans dans l'espace à  $n$  dimensions ont, en général, un et un seul point d'intersection.

Si cependant le déterminant  $\Delta$  des coefficients des coordonnées est nul, sans autre condition, ces plans ne se coupent plus, à moins que l'un des déterminants obtenus en remplaçant, dans le précédent  $\Delta$ , une ligne par les termes indépendants des coordonnées ne soit nul ; les plans se coupent alors en une infinité de points située sur une droite (variété à une dimension) car les  $n$  équations de nos plans se réduisant à  $n - 1$  distinctes,  $n - 1$  des coordonnées deviennent fonctions de l'une d'elles.

Si tous les mineurs du déterminant  $\Delta$  sont nuls, les plans peuvent n'avoir aucun point commun, ils peuvent aussi se couper suivant une variété à deux dimensions, etc.

Au fond, il ne faut voir dans ces propositions qu'une manière imagée de représenter des faits parfaitement réels ; on appréciera seulement plus tard les avantages de la pangéométrie.



On en conclut

$$\left(\sum \pm a_{12}a_{22} \dots a_{nn}\right)^2 = 1$$

en sorte que

$$A = \sum \pm a_{11}a_{22} \dots a_{nn}$$

est égal à 1 ou à  $-1$ . Lorsque  $A = 1$ , la figure qui a été transformée par la substitution orthogonale est dite avoir subi un *déplacement* euclidien.

Ce déplacement est une *translation* quand les  $a_{ij}$  sont nuls et les  $a_{ii}$  égaux à l'unité, et une *rotation* quand les  $b$  sont nuls.

Supposons  $A = 1$  et posons

$$\left. \begin{aligned} z_1 &= a_{11}y_1 + \dots + a_{1n}y_n, \\ \cdot & \cdot \\ z_n &= a_{n1}y_1 + \dots + a_{nn}y_n. \end{aligned} \right\} \tag{3}$$

En vertu de (2) on aura

$$z_1^2 + z_2^2 + \dots + z_n^2 = y_1^2 + y_2^2 + \dots + y_n^2 \tag{4}$$

et

$$\left. \begin{aligned} y_1 &= a_{11}z_1 + a_{21}z_2 + \dots + a_{n1}z_n, \\ \cdot & \cdot \\ y_n &= a_{1n}z_1 + a_{2n}z_2 + \dots + a_{nn}z_n, \end{aligned} \right\} \tag{5}$$

ce qui, en vertu de l'identité (4), exige que

$$a_{i1}a_{j1} + \dots + a_{in}a_{jn} = \begin{cases} 0 & \text{si } i \neq j, \\ 1 & \text{si } i = j. \end{cases}$$

On remarquera qu'il suffit pour que (3) et (5) soient orthogonales que

$$\sum z_i^2 = \sum y_i^2.$$

Quand on connaît deux substitutions orthogonales

$$\begin{aligned} \dots, \quad x_i &= a_{i1}y_1 + \dots + a_{in}y_n, \quad \dots \\ \dots, \quad y_i &= a'_{i1}z_1 + \dots + a'_{in}z_n, \quad \dots \end{aligned}$$





et les valeurs correspondantes des  $y$ . Dans ces conditions on aura

$$\sum x_{ij}^2 = \sum y_{ij}^2,$$

quel que soit l'indice  $j$ .

Les systèmes (4), (5), ... ont une solution et on peut grouper leurs équations autrement.

Considérons donc d'abord les premières équations des systèmes (4), (5), ... si l'on y adjoint

$$x_{1n} - y_{1n} = b_{1n}(x_{11} + y_{11}) + \dots + b_{nn}(x_{1n} + y_{1n}),$$

il faudra y adjoindre la condition

$$\sum x_{1i}^2 = \sum y_{1i}^2. \quad (a)$$

Considérons les secondes équations des systèmes (4), (5), ..., on pourra y adjoindre les conditions

$$x_{2,n-1} - y_{2,n-1} = \dots,$$

$$x_{2n} - y_{2n} = \dots,$$

pourvu que l'on ait d'abord

$$\sum x_{2i}^2 = \sum y_{2i}^2, \quad (b)$$

et

$$\sum (x_{1i} - x_{2i})^2 = \sum (y_{1i} - y_{2i})^2,$$

ce qui, en vertu de (a) et (b), peut s'écrire

$$\sum x_{1i}x_{2i} = \sum y_{1i}y_{2i},$$

et ainsi de suite.

De là résulte que à  $n - 1$  points on peut faire correspondre  $n - 1$  autres points donnés, pourvu que l'on ait

$$\begin{aligned} \sum x_{ij}^2 &= \sum y_{ij}^2, \\ \sum x_{ij}x_{kj} &= \sum y_{ij}y_{kj}. \end{aligned}$$

## DISTANCES

On appelle *distance euclidienne*, ou simplement distance de deux points  $x_1, \dots, x_n$  et  $y_1, \dots, y_n$ , la quantité

$$+\sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + \dots + (x_n - y_n)^2};$$

c'est un *invariant* de tout déplacement euclidien, c'est-à-dire une quantité qui ne change pas quand on effectue sur la figure composée des deux points une substitution orthogonale de déterminant 1 (et même  $-1$ ).

En effet si l'on pose

$$\begin{aligned} x_1 &= b_1 + a_{11}x'_1 + \dots, \\ x_2 &= b_2 + a_{21}x'_1 + \dots, \\ &\cdot \quad \cdot \\ y_1 &= b_1 + a_{11}y'_1 + \dots, \\ &\cdot \quad \cdot \end{aligned}$$

on a

$$\begin{aligned} x_1 - y_1 &= a_{11}(x'_1 - y'_1) + \dots, \\ x_2 - y_2 &= a_{21}(x'_1 - y'_1) + \dots, \\ &\cdot \quad \cdot \end{aligned}$$

et si la substitution considérée est orthogonale, on a bien

$$(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + \dots = (x'_1 - y'_1)^2 + (x'_2 - y'_2)^2 + \dots$$

c. q. f. d.

## FIGURES ÉGALES

Deux figures sont égales, quand on peut transformer l'une dans l'autre au moyen d'un déplacement. Lorsque la transformation est faite, on dit qu'on les a fait coïncider.

*Lorsque la distance de deux points A et B est égale à la distance de deux autres points A' et B', les figures AB et A'B' sont égales.*

En effet une translation fera coïncider les points A et A', une autre translation les fera coïncider avec le point O de coordonnées  $0, 0, \dots, 0$ , les points B et B' coïncideront alors avec deux autres points C et C' et comme les distances de O et C, de O et C' sont égales, une infinité de rotations permettront de faire coïncider C et C'. Donc les figures AB et A'B' sont égales.

Si l'on appelle triangle la figure formée de trois points A, B, C, et si l'on appelle côtés les distances AB, BC, AC; deux triangles ayant leurs côtés égaux deux à deux sont des figures égales, et en général dans l'espace à  $n$  dimensions deux figures formées chacune de  $n + 1$  points dont toutes les distances sont égales deux à deux sont des figures égales.

#### ÉTUDE DE LA LIGNE DROITE

*Par un point donné on peut faire passer une infinité de droites.*

En effet si  $a_1, \dots, a_n$  sont les coordonnées du point donné, les droites

$$\frac{x_1 - a_1}{\alpha_1} = \frac{x_2 - a_2}{\alpha_2} = \dots = \frac{x_n - a_n}{\alpha_n} \quad (1)$$

passeront par ce point et différeront entre elles par les paramètres  $\alpha_1 : \alpha_2 : \dots : \alpha_n$ .

*Par deux points donnés passe une droite et une seule.*

Si l'on exprime en effet que la droite (1) contient encore le point  $b_1, \dots, b_n$ , on a pour déterminer  $\alpha_1 : \alpha_2 : \dots$

$$\frac{b_1 - a_1}{\alpha_1} = \frac{b_2 - a_2}{\alpha_2} = \dots$$

Les  $\alpha_1 : \alpha_2 : \dots$  sont ainsi déterminés sans ambiguïté, et l'équation de la seule droite passant par  $a_1, a_2, \dots$  et  $b_1, b_2, \dots$  est

$$\frac{x_1 - a_1}{b_1 - a_1} = \dots = \frac{x_n - a_n}{b_n - a_n}.$$

*Ainsi deux droites qui ont deux points communs coïncident.*

*Deux droites quelconques sont deux figures égales.*

En effet, considérons deux droites, on peut faire subir à chacune d'elles une translation qui les fasse passer par le point dont toutes les coordonnées sont nulles. Soit

$$\frac{x_1}{a_1} = \frac{x_2}{a_2} = \dots\dots, \quad \frac{x_1}{b_1} = \frac{x_2}{b_2} = \dots\dots;$$

leurs équations, la première passe par le point A

$$\frac{a_1}{\sqrt{\sum a_i^2}}, \quad \frac{a_2}{\sqrt{\sum a_i^2}}, \quad \dots\dots,$$

la seconde par le point B

$$\frac{b_1}{\sqrt{\sum b_i^2}}, \quad \frac{b_2}{\sqrt{\sum b_i^2}}, \quad \dots\dots,$$

tous deux à la distance 1 de leur point commun, une rotation fera coïncider les points A et B, elles auront alors deux points communs et coïncideront donc, etc.

*Sur toute droite passant en A, il existe deux points B et B' situés à égales distances de A.*

En effet soit

$$\frac{x_1 - a_1}{\alpha_1} = \frac{x_2 - a_2}{\alpha_2} = \dots\dots = t$$

une droite, les points  $a_1 + \alpha_1 t, a_2 + \alpha_2 t, \dots$ ;  $a_1 - \alpha_1 t, a_2 - \alpha_2 t, \dots$  sont tous deux à la distance

$$t\sqrt{\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \dots\dots}$$

de A dont les coordonnées sont  $a_1, a_2, \dots$  et ce sont les seuls points de la droite située à cette distance de A, car la distance change avec  $t$ .

Soient  $b_1, b_2, \dots, b_n$  les coordonnées de B;  $b'_1, \dots, b'_n$  celles de B', les coefficients directeurs de la droite seront à volonté

$$\pm(a_1 - b_1), \pm(a_2 - b_2), \dots\dots, \pm(a_n - b_n)$$

$$\text{ou } \pm(a_1 - b'_1), \dots\dots, \pm(a_n - b'_n).$$

Nous observerons que

$$\frac{\alpha_1}{\sqrt{\sum \alpha_i^2}}, \quad \frac{\alpha_2}{\sqrt{\sum \alpha_i^2}}, \quad \dots, \quad \frac{\alpha_n}{\sqrt{\sum \alpha_i^2}},$$

sont inférieurs à 1 en valeur absolue, ce qui permettra de les désigner respectivement par  $\cos \varphi_1, \cos \varphi_2, \dots, \cos \varphi_n$  et l'on aura

$$\cos^2 \varphi_1 + \cos^2 \varphi_2 + \dots + \cos^2 \varphi_n = 1 \quad (1)$$

et les *nombres*  $\varphi$  seront bien déterminés si on les suppose compris entre 0 et  $\pi$ .

Les équations de la droite prennent alors la forme

$$x_1 = a_1 + t \cos \varphi_1, \quad \dots, \quad x_n = a_n + t \cos \varphi_n,$$

et comme en vertu de (1)

$$\sum (x_i - a_i)^2 = t^2,$$

$\pm t$  est la distance du point  $x_1, \dots, x_n$  de la droite au point  $a_1, \dots, a_n$ .

Les points de la droite peuvent être classés en deux catégories, les uns seront fournis par les valeurs positives de  $t$ , les autres par les valeurs négatives de  $t$ .

On obtient les points de la seconde catégorie en supposant  $t$  positif mais en remplaçant  $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$  par  $\pi - \varphi_1, \pi - \varphi_2, \dots$  (ou par  $\pi + \varphi_1, \pi + \varphi_2, \dots$ ). On dit que les premiers sont situés dans la direction positive de la droite et que les autres sont situés dans la direction opposée, et l'on peut évidemment prendre pour direction positive celle que l'on veut.

## ANGLES

Considérons deux droites, mettons leurs équations sous les formes

$$x_1 = a_1 + t \cos \varphi_1, \quad \dots, \quad x_n = a_n + t \cos \varphi_n, \quad (1)$$

$$y_1 = b_1 + u \cos \psi_1, \quad \dots, \quad y_n = b_n + u \cos \psi_n; \quad (2)$$

leurs directions positives sont alors déterminées. Il est facile de voir que si l'on pose

$$\cos V = \cos \varphi_1 \cos \psi_1 + \cos \varphi_2 \cos \psi_2 + \dots + \cos \varphi_n \cos \psi_n,$$

$\cos V$  sera compris entre  $+1$  et  $-1$ , et que  $\cos V$  restera le même quand on déplacera la figure formée par les deux droites. En effet

$$\begin{aligned} \cos V &= \frac{(x_1 - a_1)(y_1 - b_1) + \dots + (x_n - a_n)(y_n - b_n)}{ut} \\ &= - \frac{\sum [(x_i - a_i - y_i + b_i)^2 - (x_i - a_i)^2 - (y_i - b_i)^2]}{2ut} \end{aligned}$$

et

$$\sum (x_i - a_i - y_i + b_i)^2, \quad \sum (x_i - a_i)^2, \quad \sum (y_i - b_i)^2$$

ne changent pas quand on fait une substitution orthogonale, de plus  $\cos V$  est inférieur à un, ou tout au plus égal à un, en valeur absolue.

On a en effet

$$\begin{aligned} &(\cos^2 \varphi_1 + \cos^2 \varphi_2 + \dots)(\cos^2 \psi_1 + \cos^2 \psi_2 + \dots) \\ &\quad - (\cos \varphi_1 \cos \psi_1 + \cos \varphi_2 \cos \psi_2 + \dots)^2 \\ &= \sum (\cos \varphi_i \cos \psi_j - \cos \varphi_j \cos \psi_i)^2 > 0 \end{aligned}$$

ou

$$1 - \cos^2 V > 0,$$

le nombre  $V$  compris entre  $0$  et  $\pi$  qui a pour cosinus

$$\cos \varphi_1 \cos \psi_1 + \cos \varphi_2 \cos \psi_2 + \dots + \cos \varphi_n \cos \psi_n,$$

est ce que l'on appelle l'angle des deux droites, ou de leurs directions positives.

Lorsque l'on donne les droites sous la forme

$$x_1 = a_1 + t\alpha_1, \quad \dots; \quad x_1 = b_1 + u\beta_1, \quad \dots$$

ou

$$\frac{x_1 - a_1}{\alpha_1} = \dots = \frac{x_n - a_n}{\alpha_n}, \quad \dots$$

la direction positive n'est pas indiquée; on a alors

$$\cos V = \pm \frac{\alpha_1 \beta_1 + \alpha_2 \beta_2 + \dots}{\sqrt{\sum \alpha_i^2 \sum \beta_i^2}},$$

et l'angle est à volonté  $V$  ou  $\pi - V$ .

Lorsque  $V = 0$  ou  $\pi$ , on dit que les deux droites sont *parallèles*, elles sont de même sens quand  $V = 0$ .

Lorsque  $V = \frac{\pi}{2}$ , on dit qu'elles sont dans des directions perpendiculaires, si de plus elles ont un point commun on dit qu'elles sont perpendiculaires l'une sur l'autre.

*Par un point on peut toujours mener une et une seule parallèle à une droite donnée.*

Soient  $\cos \varphi_1, \cos \varphi_2, \dots$  les cosinus directeurs de la droite donnée,  $a_1, a_2, \dots$  les coordonnées du point donné,  $\cos \psi_1, \cos \psi_2, \dots$  les cosinus directeurs de la droite cherchée, ses équations seront

$$x_1 = a_1 + t \cos \psi_1, \quad x_2 = a_2 + t \cos \psi_2, \quad \dots$$

et l'on devra avoir

$$\pm 1 = \cos \varphi_1 \cos \psi_1 + \cos \varphi_2 \cos \psi_2 + \dots$$

ce qui donne

$$1 = (\cos \varphi_1 \cos \psi_1 + \cos \varphi_2 \cos \psi_2 + \dots)^2,$$

ou

$$\sum \cos^2 \varphi_i \sum \cos^2 \psi_i - \left( \sum \cos \varphi_i \cos \psi_i \right)^2 = 0,$$

ou

$$\sum (\cos \varphi_i \cos \psi_j - \cos \varphi_j \cos \psi_i)^2 = 0$$

ce qui ne peut avoir lieu que si

$$\cos \varphi_i \cos \psi_j - \cos \varphi_j \cos \psi_i = 0,$$

ou

$$\frac{\cos \varphi_1}{\cos \psi_1} = \frac{\cos \varphi_2}{\cos \psi_2} = \dots = \frac{\sqrt{\sum \cos^2 \varphi_i}}{\sqrt{\sum \cos^2 \psi_i}} = \pm 1.$$

La droite cherchée est donc bien déterminée, et a pour équations

$$x_1 = a_1 + t \cos \varphi_1, \quad x_2 = a_2 + t \cos \varphi_2, \quad \dots$$

*Par un point donné  $b_1, b_2, \dots, b_n$ , mener une perpendiculaire sur la droite.*

$$x_1 = a_1 + t \cos \varphi_1, \quad x_2 = a_2 + t \cos \varphi_2, \quad \dots$$

Supposons d'abord le point  $b_1, b_2, \dots$ , sur la droite donnée et en coïncidence avec  $a_1, a_2, \dots$ , la droite cherchée aura pour équations

$$x_1 = a_1 + u \cos \psi_1, \quad x_2 = a_2 + u \cos \psi_2, \quad \dots \quad (1)$$

et l'on devra avoir

$$\cos \varphi_1 \cos \psi_1 + \cos \varphi_2 \cos \psi_2 + \dots = 0; \quad (2)$$

il en résulte qu'une infinité de droites répondent à la question car tous les  $\psi$  moins un sont arbitraires, si l'on élimine les  $\psi$  entre (1) et (2), on aura une équation satisfaite pour tous les points des perpendiculaires en question, ce sera leur lieu, ce lieu a pour équation

$$(x_1 - a_1) \cos \varphi_1 + (x_2 - a_2) \cos \varphi_2 + \dots = 0,$$

et comme il est du premier degré c'est un plan. On dit qu'il est *perpendiculaire* à la droite (1). Donc *par un point d'une droite on peut mener un et un seul plan perpendiculaire à la droite.*

Supposons maintenant le point  $b_1, b_2, \dots$ , hors de la droite donnée ; par ce point menons le plan

$$(x_1 - b_1) \cos \varphi_1 + (x_2 - b_2) \cos \varphi_2 + \dots + (x_n - b_n) \cos \varphi_n = 0.$$

Cherchons le point où il rencontre la droite, le  $t$  de ce point sera donné par la formule

$$\sum (a_i - b_i + t \cos \varphi_i) \cos \varphi_i = 0,$$

ou, comme

$$\begin{aligned} \sum \cos^2 \varphi_i &= 1, \\ t &= \sum (b_i - a_i) \cos \varphi_i. \end{aligned}$$

Les coordonnées du point de rencontre seront

$$a_1 + \cos \varphi_1 \sum (b_i - a_i) \cos \varphi_i, \quad \dots, \quad (3)$$

la droite passant par ce point et  $b_1, b_2, \dots$  aura pour équation

$$\frac{x_1 - b_1}{a_1 - b_1 + \cos \varphi_1 \sum (b_i - a_i) \cos \varphi_i} = \dots;$$

elle sera perpendiculaire à la proposée, car on aura

$$\sum \cos \varphi_i [a_i - b_i + \cos \varphi_i \sum (b_j - a_j) \cos \varphi_j] = 0$$

en effet cette formule se réduit à

$$\sum (a_i - b_i) \cos \varphi_i - \sum (b_j - a_j) \cos \varphi_j = 0,$$

ce qui est une identité.

La distance  $\delta$  des points (3) et  $b_1, b_2, \dots$  que l'on appelle distance du point  $b_1, b_2, \dots$  à la droite donnée, est donnée par la formule

$$\begin{aligned} \delta^2 &= \sum \left[ (a_i - b_i + \cos \varphi_i \sum (b_j - a_j) \cos \varphi_j) \right]^2 \\ &= \sum [(a_i - b_i) \cos \varphi_j - (a_j - b_j) \cos \varphi_i]^2. \end{aligned}$$

Cette distance  $\delta$  est la plus petite distance du point  $b_1, b_2, \dots$  à un point  $x_1, x_2, \dots, x_n$  de la droite. En effet si l'on veut rendre

$$(x_1 - b_1)^2 + (x_2 - b_2)^2 + \dots = \Delta^2$$

minimum avec les conditions (1), il faudra rendre minimum

$$\sum (a_i - b_i + u \cos \varphi_i)^2 = \Delta^2$$

ou

$$\Delta^2 = u^2 + \sum 2u \cos \varphi_i (a_i - b_i) + \sum (a_i - b_i)^2$$

pour cela il faut prendre

$$u = \sum (b_i - a_i) \cos \varphi_i,$$

et l'on a

$$\Delta^2 = \sum (a_i - b_i)^2 - \left[ \sum (a_i - b_i) \cos \varphi_i \right]^2 = \delta^2.$$

*On peut mener par un point une perpendiculaire à un plan.*

En effet soit

$$x_1 \cos \varphi_1 + x_2 \cos \varphi_2 + \dots + x_n \cos \varphi_n + h = 0$$

l'équation d'un plan, où on peut supposer

$$\cos^2 \varphi_1 + \cos^2 \varphi_2 + \dots + \cos^2 \varphi_n = 1.$$

La droite qui a pour équations

$$\frac{x_1 - a_1}{\cos \varphi_1} = \frac{x_2 - a_2}{\cos \varphi_2} = \dots = t$$

sera la droite demandée; le point où elle rencontre le plan, ou *pied* de la perpendiculaire, sera donné par la formule

$$\cos \varphi_1 (a_1 + t \cos \varphi_1) + \cos \varphi_2 (a_2 + t \cos \varphi_2) + \dots + h = 0,$$

ou

$$t = \frac{a_1 \cos \varphi_1 + \dots + a_n \cos \varphi_n + h}{\sum \cos^2 \varphi_i} = a_1 \cos \varphi_1 + \dots + a_n \cos \varphi_n + h;$$

et  $t$  est la distance du point  $a_1, a_2, \dots$  au pied, c'est ce que l'on appelle la distance du point au plan.

Si l'on cherche à rendre

$$\sum (a_j - x_j)^2 = \Delta^2$$

minimum,  $x_1, x_2, \dots$  désignant les coordonnées d'un point du plan on trouve que les  $x$  doivent satisfaire aux relations

$$(a_i - x_i) + t \cos \varphi_i = 0,$$

et par suite que  $t$  est la plus courte distance du point  $a_1, a_2, \dots$  au plan.

Considérons les plans

$$x_1 = 0, \quad x_2 = 0, \quad \dots, \quad x_n = 0;$$

les distances du point  $y_1, y_2, \dots, y_n$  à ces plans seront précisément les coordonnées  $y_1, \dots, y_n$  de ce point. Les plans  $x_1 = 0, x_2 = 0, \dots$  portent le nom de *plans de coordonnées*, leur intersection est le point  $0, 0, \dots$  on lui donne le nom *d'origine* des coordonnées.

## TRIGONOMÉTRIE

Considérons la figure formée par trois points, soient  $a, b, c$  les distances de ces points,  $x_1, \dots, x_n; y_1, \dots, y_n; z_1, \dots, z_n$  leurs coordonnées; appelons A, B, C les angles que font respectivement les directions qui vont de  $y_1 \dots$  en  $z_1 \dots$ ; de  $z_1 \dots$  en  $x_1 \dots$  de  $x_1 \dots$  en  $y_1 \dots$ . Les cosinus directeurs de ces directions sont

$$\begin{array}{ccc} \frac{z_1 - y_1}{a}, & \frac{z_2 - y_2}{a}, & \dots \\ \frac{x_1 - z_1}{b}, & \frac{x_2 - z_2}{b}, & \dots \\ \frac{y_1 - x_1}{c}, & \frac{y_2 - x_2}{c}, & \dots \end{array}$$

on en conclut

$$\cos A = \frac{(x_1 - z_1)(y_1 - x_1) + (x_2 - z_2)(y_2 - x_2) + \dots}{bc}$$

ou

$$\cos A = \frac{\sum [(x_i - z_i)^2 + (x_i - y_i)^2 - (y_i - z_i)^2]}{2bc},$$

ou enfin

$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$$

d'où l'on déduit

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A,$$

$$b^2 = c^2 + a^2 - 2ac \cos B,$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C.$$

On sait que de ces formules on peut conclure

$$A + B + C = \pi, \quad \frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b} = \frac{\sin C}{c}, \quad \text{etc.}$$

en supposant A, B, C compris entre 0 et  $\pi$ . Toutes ces formules renferment implicitement les théorèmes du premier livre de géométrie et une grande partie de ceux du troisième, le cinquième livre résulte également de ce que nous venons de démontrer. Mais il est entendu qu'il s'agit ici, non de vérités géométriques mais de vérités s'énonçant dans un langage emprunté à la géométrie et ne s'appliquant pas, pour le moment, à des êtres concrets.

#### PERPENDICULAIRE COMMUNE À PLUSIEURS DROITES

Considérons les droites représentées par

$$x_1 = a_1 + t \cos \varphi_1, \quad \dots, \quad x_n = a_n + t \cos \varphi_n,$$

$$x_1 = b_1 + u \cos \psi_1, \quad \dots, \quad x_n = b_n + u \cos \psi_n,$$

.....

il existera une et une seule direction  $\cos \lambda_1, \cos \lambda_2, \dots, \cos \lambda_n$  perpendiculaire à  $n - 1$  de ces droites ; mais il n'est pas possible de trouver une droite de direction  $\cos \lambda_1, \cos \lambda_2, \dots$  les rencontrant toutes si  $n > 3$ . Si  $n = 3$  la droite perpendiculaire aux deux premières sera

$$x_1 = p_1 + \rho \cos \lambda_1, \quad x_2 = p_2 + \rho \cos \lambda_2, \quad x_3 = p_3 + \rho \cos \lambda_3$$

et si elle les rencontre on aura

$$a_1 = t \cos \varphi_1 = p_1 + \rho \cos \lambda_1, \dots$$

$$b_1 = u \cos \psi_1 = p_1 + \rho \cos \lambda_1, \dots$$

et par suite

$$\begin{vmatrix} a_1 - p_1, & \cos \varphi_1, & \cos \lambda_1 \\ a_2 - p_2, & \cos \varphi_2, & \cos \lambda_2 \\ a_3 - p_3, & \cos \varphi_3, & \cos \lambda_3 \end{vmatrix} = 0 \quad \begin{vmatrix} b_1 - p_1, & \cos \psi_1, & \cos \lambda_1 \\ b_2 - p_2, & \cos \psi_2, & \cos \lambda_2 \\ b_3 - p_3, & \cos \psi_3, & \cos \lambda_3 \end{vmatrix} = 0$$

ces équations entre les coordonnées  $p_1, p_2, p_3$  d'un point quelconque de la perpendiculaire commune seront les équations de cette perpendiculaire.

## SPHÈRES

On appelle sphère la surface qui a pour équation

$$\sum (x_i - a_i)^2 = R^2 \tag{1}$$

c'est le lieu des points à la distance  $R$  du point fixe  $a_1, a_2, \dots, a_n$ , ce point est le centre de la sphère,  $R$  est son rayon.

Toute équation de la forme

$$\sum x_i^2 + \sum A_i x_i + B = 0$$

peut se mettre sous la forme

$$\sum \left( x_i + \frac{A_i}{2} \right)^2 + B - \sum \frac{A_i^2}{4} = 0,$$

et par suite représente une sphère de centre

$$-\frac{A_1}{2}, \dots, -\frac{A_n}{2}$$

et de rayon réel ou imaginaire  $\sqrt{\sum \frac{A_i^2}{4} - B}$ .

La sphère (1) dans l'espace à  $n$  dimensions est ce que l'on appelle une surface *fermée*. Il faut entendre par là que si l'on suppose

$$\sum (z_i - a_i)^2 < R^2 \quad (2)$$

et si l'on fait varier  $z_1, z_2, \dots, z_n$ , on ne pourra jamais avoir

$$\sum (z_i + \Delta z_i - a_i)^2 > R^2 \quad (3)$$

en faisant varier les  $\Delta z$  d'une manière continue sans les faire passer par une valeur telle que

$$\sum (z_i + \Delta z_i - a_i)^2 = R^2.$$

Les points  $z_1, z_2, \dots, z_n$  pour lesquels la distance à  $a_1, a_2, \dots, a_n$  est inférieure à  $R$  sont dits intérieurs à la sphère, ceux pour lesquels  $\sum (z_i - a_i)^2 > R^2$  sont dits extérieurs.

Si l'on considère la variété plane à  $n - 1$  dimensions

$$\left. \begin{aligned} \sum (x_i - a_i)^2 - R^2 &= 0, \\ \sum A_i x_i + B &= 0, \end{aligned} \right\}$$

en la déplaçant de manière à faire coïncider son plan avec le plan  $x_n = 0$  il viendra

$$\sum_{i=1}^{i=n-1} (x_i - b_i)^2 - R'^2 = 0, \quad x_n = 0$$

$b_i$  et  $R'$  désignant de nouvelles constantes, ce sera si l'on veut, une sphère dans l'espace à  $n - 1$  dimensions ; à ce point de vue, la sphère n'est plus





c'est ce que l'on appelle le plan tangent en  $x_1, \dots, x_n$  à la surface.

Si l'équation de la surface se présente sous la forme

$$F(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0,$$

la règle des fonctions implicites permet de mettre l'équation du plan tangent sous la forme

$$(X_1 - x_1) \frac{\partial F}{\partial x_1} + \dots + (X_n - x_n) \frac{\partial F}{\partial x_n} = 0.$$

*Le plan tangent en M est le lieu des droites qui ont avec la surface un contact du premier ordre en M.*

En effet, soit

$$\frac{x_1 - x'_1}{a_1} = \dots = \frac{x_n - x'_n}{a_n}$$

une droite passant par le point  $x'_1, x'_2, \dots, x'_n$  de la surface

$$F(x_1, \dots, x_n) = 0,$$

on aura

$$F(x'_1, \dots, x'_n) = 0,$$

et

$$\frac{\partial F}{\partial x'_1} dx'_1 + \frac{\partial F}{\partial x'_2} dx'_2 + \dots = 0,$$

or les  $dx'$  pour la droite sont proportionnels aux  $a$ , en sorte que ses équations sont de la forme

$$\frac{x_1 - x'_1}{dx'_1} = \frac{x_2 - x'_2}{dx'_2} = \dots;$$

Le lieu de ces droites, quand on fait varier les  $dx'$ , est donc

$$(x_1 - x'_1) \frac{\partial F}{\partial x'_1} + (x_2 - x'_2) \frac{\partial F}{\partial x'_2} + \dots = 0,$$

ce qui démontre la proposition.

En général la variété du premier degré

$$(X_1 - x_1) \frac{\partial F}{\partial x_1} + (X_2 - x_2) \frac{\partial F}{\partial x_2} + \dots = 0,$$

$$(X_1 - x_1) \frac{\partial G}{\partial x_1} + (X_2 - x_2) \frac{\partial G}{\partial x_2} + \dots = 0,$$

touchera la variété

$$F = 0, \quad G = 0, \quad \dots$$

### VARIÉTÉS SINGULIÈRES

Le plan tangent à la surface

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0$$

a pour équation

$$(X_1 - x_1) \frac{\partial f}{\partial x_1} + \dots + (X_n - x_n) \frac{\partial f}{\partial x_n} = 0,$$

ou en posant

$$\frac{\partial x_n}{\partial x_1} = p_1, \quad \dots, \quad \frac{\partial x_n}{\partial x_{n-1}} = p_{n-1};$$

et, en appliquant la règle des fonctions implicites,

$$X_n - x_n = p_1(X_1 - x_1) + \dots + p_{n-1}(X_{n-1} - x_{n-1}),$$

ou encore

$$X_n = p_1 X_1 + \dots + p_{n-1} X_{n-1} + (x_n - p_1 x_1 - \dots - p_{n-1} x_{n-1});$$

le plan tangent renferme donc  $n$  paramètres

$$p_1, \dots, p_{n-1} \quad \text{et} \quad \theta = x_n - p_1 x_1 - \dots - p_{n-1} x_{n-1},$$

mais ces paramètres se réduisent à  $n - 1$  distincts car  $\theta$  est fonction de  $p_1, \dots, p_{n-1}$  comme nous allons le voir. On a en effet

$$d\theta = dx_n - p_1 dx_1 - \dots - p_{n-1} dx_{n-1} - x_1 dp_1 - \dots - x_{n-1} dp_{n-1}$$

mais

$$dx_n = p_1 dx_1 + \dots + p_{n-1} dx_{n-1},$$

donc

$$d\theta = x_1 dp_1 + \dots + x_n dp_n$$

et  $\theta$  est fonction de  $p_1, p_2, \dots, p_n$ .

Il résulte de là que l'on peut assujettir le plan tangent à une surface à  $n - 1$  conditions. On peut, par exemple, l'assujettir à passer par  $n - 1$  points donnés, on aura alors  $n - 1$  équations qui permettront de calculer les  $n - 1$  quantités  $x_1, x_2, \dots, x_{n-1}$  qui déterminent le point de contact. Supposons maintenant que l'on pose

$$F(p_1, p_2, \dots, p_{n-1}) = 0. \quad (1)$$

Cette équation intégrée fournira une infinité de surfaces, car son intégrale dépend, non seulement de la forme de  $F$ , qui est arbitraire, mais en outre d'une seconde fonction arbitraire amenée par l'intégration.

Pour une pareille surface le plan tangent sera déterminé par  $n - 2$  conditions. Il pourra se faire que l'équation de la surface considérée satisfasse à plusieurs conditions analogues à (1), cela diminuera encore le nombre des conditions auxquelles on peut assujettir le plan tangent.

Dans l'espace à 3 dimensions les surfaces singulières dont nous venons de signaler l'existence portent le nom de surfaces développables. Nous leur conserverons ce nom dans l'hyperespace.

#### LES LONGUEURS, LES ANGLES

Nous appellerons longueur d'une courbe

$$x_1 = \varphi_1(t), \quad \dots, \quad x_n = \varphi_n(t)$$

prise de  $x_1^0, \dots, x_n^0$  en  $x_1', \dots, x_n'$  l'intégrale

$$s = \int_{t^0}^{t'} \sqrt{dx_1^2 + \dots + dx_n^2},$$

$t^0$  et  $t'$  désignant les valeurs de  $t$  pour lesquelles en général  $x_i = x_i^0$  et  $x_i = x_i'$ , alors

$$ds^2 = dx_1^2 + dx_2^2 + \dots + dx_n^2$$

comme  $dx_1, dx_2, \dots$  sont proportionnels aux cosinus directeurs de la tangente en  $x_1, \dots, x_n$  à la courbe, ces cosinus eux-mêmes seront  $\frac{dx_1}{ds}, \frac{dx_2}{ds}, \dots$

Nous dirons que deux courbes

$$\dots x_i = \varphi_i(t), \quad \text{et} \quad \dots x_i = \psi_i(u) \dots$$

se coupent sous l'angle  $V$  en  $x_1, \dots, x_n$  si leurs tangentes se coupent sous cet angle, c'est-à-dire si

$$\frac{d\varphi_1}{dt} \frac{d\psi_1}{du} + \dots + \frac{d\varphi_n}{dt} \frac{d\psi_n}{du} = \cos V.$$

Si l'on a

$$x_1 = a_1 + t \cos \varphi_1, \quad \dots, \quad x_n = a_n + t \cos \varphi_n$$

et  $\sum \cos^2 \varphi = 1$  on aura

$$\begin{aligned} dx_1 &= \cos \varphi_1 dt, \quad \dots \\ dx_1^2 + dx_2^2 + \dots &= dt^2 = ds^2 \end{aligned}$$

et  $t$  sera la longueur de la droite comprise entre  $a_1, \dots, a_n$  et  $x_1, \dots, x_n$ . Ce qui est d'accord avec notre définition primitive de la longueur d'un segment.

## PANGÉOMÉTRIE SPHÉRIQUE

En voilà assez, je pense, pour montrer que la pangéométrie que nous venons d'exposer et que l'on peut appeler pangéométrie euclidienne, se confond, dans le cas des espaces à trois dimensions, avec la géométrie ordinaire, à cela près que les mots point, surface, etc. . . . , n'y ont pas la même signification qu'en géométrie : ils ont un sens beaucoup plus général.

Nous allons maintenant étudier d'autres espaces.

Nous appellerons point l'ensemble de  $n$  nombres  $x_1, x_2, \dots, x_n$ , non plus arbitraires mais satisfaisant à la relation

$$x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 = R^2 \quad (1)$$

ce qui revient à dire que nous ne considérons que des points situés sur une sphère (1).

Nous dirons qu'un point subit un *déplacement* dans le cas où ses coordonnées  $x_1, \dots, x_n$  subissent une substitution orthogonale homogène

$$\begin{aligned} x'_1 &= a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n, \\ &\cdot \quad \cdot \\ x'_n &= a_{n1}x_1 + \dots + a_{nn}x_n, \end{aligned}$$

substitution en vertu de laquelle il reste sur la sphère (1) car on a

$$\sum x'^2 = \sum x^2 = R^2;$$

deux figures seront égales quand on pourra transformer l'une dans l'autre au moyen d'un déplacement. (Acception nouvelle.)

Nous appellerons plans les seules surfaces représentées par des équations homogènes du premier degré. Les plans seront alors des figures égales, c'est-à-dire transformables les unes dans les autres par des substitutions orthogonales homogènes.

$n - 2$  plans se couperont suivant une *droite*. Ainsi une droite sera une variété à une dimension représentée par  $n$  équations telles que

$$x_i = a_i u + b_i v \quad (2)$$

$u$  et  $v$  désignant des paramètres variables,  $a_i, b_i$  des constantes et  $u$  et  $v$  ne seront pas arbitraires parce que l'on doit avoir  $\sum x^2 = R^2$ . Comme on peut toujours poser  $u = \rho \cos \varphi$ ,  $v = \rho \sin \varphi$ , on pourra toujours remplacer les équations (2) par

$$x_i = \rho(a_i \cos \varphi + b_i \sin \varphi)$$

et si l'on fait  $\varphi = 0$ , on voit que  $a_1\rho, a_2\rho, \dots$  sera un point de la droite ; donc  $\sum a^2\rho^2$  doit être égal à  $R^2$ , pour la même raison on devra avoir  $\sum b^2\rho^2 = R^2$ , alors comme  $\sum x^2$  est aussi égal à  $R^2$ , on aura

$$\sum x^2 = R^2 = \sum a^2\rho^2 \cos^2 \varphi + \sum b^2\rho^2 \sin^2 \varphi + 2 \sum ba\rho^2 \sin \varphi \cos \varphi$$

ou

$$R^2 = R^2 + 2 \sum ab\rho^2 \sin \varphi \cos \varphi$$

ce qui exige que  $\sum ab = 0$ .

Les équations de la droite seront de la forme

$$x_i = a_i \cos \varphi + b_i \sin \varphi$$

avec les conditions

$$\sum a^2 = R^2, \quad \sum b^2 = R^2, \quad \sum ab = 0.$$

La distance de deux points  $x_1, \dots, x_n$  et  $y_1, \dots, y_n$  ne sera plus la quantité  $\sqrt{\sum (y - x)^2}$ , mais l'invariant plus simple  $\delta$  donné par

$$x_1y_1 + x_2y_2 + \dots + x_ny_n = R \cos \delta;$$

la longueur  $ds$  d'un arc de courbe infiniment petit sera donné par définition par la formule

$$ds^2 = dx_1^2 + dx_2^2 + \dots + dx_n^2.$$

## TRIGONOMÉTRIE SPHÉRIQUE

Reprenons les équations de la droite

$$x_i = a_i \cos \varphi + b_i \sin \varphi, \quad \dots \quad (1)$$

on en tire

$$dx_i = (-a_i \sin \varphi + b_i \cos \varphi) d\varphi$$

et par suite en appelant  $ds$  l'élément d'arc de droite

$$ds^2 = R^2 d\varphi^2;$$

(en tenant compte des relations  $\sum a^2 = \sum b^2 = R^2$ ,  $\sum ab = 0$ ) alors  $\varphi = \frac{s - s^0}{R}$  ou simplement  $\varphi = \frac{s}{R}$ , si l'on compte les arcs à partir du point  $a_1, \dots, a_n$ ; donc les équations (1) s'écrivent

$$x_i = a_i \cos \frac{s}{R} + b_i \sin \frac{s}{R},$$

si l'on exprime que la droite passe par le point  $c_1, c_2, \dots, c_n$  on aura

$$c_i = a_i \cos \frac{s'}{R} + b_i \sin \frac{s'}{R}.$$

L'élimination de  $b_i$  donne

$$x_i = \frac{a_i \sin \frac{s' - s}{R} + c_i \sin \frac{s}{R}}{\sin \frac{s'}{R}}.$$

Considérons maintenant un triangle ABC, soient  $x_1, \dots, x_n$  les coordonnées du sommet A;  $y_1, \dots, y_n$  celles de B;  $z_1, \dots, z_n$  celles de C, les équations de AB et AC seront :

$$X_i = \frac{x_i \sin \frac{c - s}{R} + y_i \sin \frac{s}{R}}{\sin \frac{c}{R}}, \quad (2)$$

$$X_i = \frac{x_i \sin \frac{b - s}{R} + z_i \sin \frac{s}{R}}{\sin \frac{b}{R}}. \quad (3)$$

$X_1, \dots$  sont alors les coordonnées courantes et  $a, b, c$  les longueurs de BC, CA, AB. Calculons l'angle A des côtés AB, AC, il est donné par la formule

$$\cos A = \sum \frac{\partial X_i}{\partial s} \frac{\delta X_i}{\delta s},$$

$\frac{\partial X_i}{\partial s}$  désignant la dérivée de  $X_i$  tirée de (2) pour  $s = 0$  et  $\frac{\delta X_i}{\delta s}$  la même dérivée tirée de (3). On aura ainsi

$$\cos A = \sum \frac{\left(x_i \cos \frac{c}{R} - y_i\right) \left(x_i \cos \frac{b}{R} - z_i\right)}{\sin \frac{c}{R} \sin \frac{b}{R}} \frac{1}{R^2},$$

ou

$$\begin{aligned} R^2 \cos A \sin \frac{b}{R} \sin \frac{c}{R} = \sum x_i^2 \cos \frac{c}{R} \cos \frac{b}{R} - \sum x_i y_i \cos \frac{b}{R} \\ - \sum x_i z_i \cos \frac{c}{R} + \sum y_i z_i, \end{aligned}$$

ou

$$\begin{aligned} R^2 \cos A \sin \frac{b}{R} \sin \frac{c}{R} = R^2 \cos \frac{b}{R} \cos \frac{c}{R} - R^2 \cos \frac{c}{R} \cos \frac{b}{R} \\ - R^2 \cos \frac{b}{R} \cos \frac{c}{R} + R^2 \cos \frac{a}{R}, \end{aligned}$$

ou finalement

$$\cos \frac{a}{R} = \cos \frac{b}{R} \cos \frac{c}{R} + \sin \frac{b}{R} \sin \frac{c}{R} \cos A;$$

c'est la formule fondamentale de la trigonométrie sphérique d'où l'on déduit toutes les autres.

#### PANGÉOMÉTRIE HYPERBOLIQUE

En pangéométrie hyperbolique, on appelle point l'ensemble de  $n$  nombres  $x_1, \dots, x_n$  liés entre eux pour la relation

$$x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_{n-1}^2 - x_n^2 = R^2 \quad (1)$$

qui est l'équation euclidienne d'un *hyperboloïde*. Nous ferons usage de la notation  $\sum' a_i$  en général pour désigner une somme de termes dont le dernier sera pris avec le signe  $-$  en sorte que (1) s'écrira  $\sum' x_i^2 = R^2$  ou même  $\sum' x^2 = R^2$ .

Nous dirons qu'un point subit un déplacement quand ses coordonnées  $x_1, \dots, x_n$  subiront une substitution linéaire de la forme

$$\begin{aligned} x'_1 &= a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n, \\ &\cdot \quad \cdot \\ x'_n &= a_{n1}x_1 + \dots + a_{nn}x_n, \end{aligned}$$

non plus orthogonale mais telle que

$$\sum'_i a_{pi}a_{qi} = \begin{cases} 0 & \text{si } p \geq q \\ 1 & \text{si } p = q \end{cases}$$

alors on a aussi

$$\sum'_i a_{pi}a_{iq} = \begin{cases} 0 & \text{si } p \geq q \\ 1 & \text{si } p = q \end{cases}$$

comme il est facile de le vérifier.

Les plans seront les surfaces représentées par des équations homogènes du premier degré, et les droites seront des variétés à une dimension situées sur des plans.

Nous pourrons mettre les équations d'une droite sous la forme

$$x_i = \rho(a_i \cosh \varphi + b_i \sinh \varphi)$$

$\rho$  et  $\varphi$  désignant des paramètres variables,  $a_i, b_i$  des constantes. En faisant  $\varphi = 0$ , on voit que le point  $\rho a_i$  appartient à la droite, alors  $\sum' a^2 \rho^2$  doit être égal à  $R^2$ , et comme  $\sum' x^2$  doit être égal à  $R^2$  on voit que  $\sum' b^2 \rho^2 = R^2$  et que  $\sum' ab = 0$ , en sorte que les équations de la droite seront

$$x_i = a_i \cosh \varphi + b_i \sinh \varphi$$

avec les conditions

$$\sum' a_i^2 = R^2, \quad -\sum' b_i^2 = R^2, \quad \sum' a_i b_i = 0.$$

La distance  $\delta$  de deux points sera définie par la formule

$$\cosh \delta = \sum' xy,$$

$x_1, \dots, x_n$  et  $y_1, \dots, y_n$  désignant les coordonnées de ces points, enfin la longueur d'un arc  $ds$  infiniment petit sera défini par la formule

$$-ds^2 = \sum' dx^2;$$

$\delta$  et  $ds$  sont des invariants de la substitution que nous avons appelée un déplacement.

### TRIGONOMÉTRIE HYPERBOLIQUE

Reprenons les équations de la droite

$$x_i = a_i \cosh \varphi + b_i \sinh \varphi \tag{1}$$

on en tire

$$dx_i = (a_i \sinh \varphi + b_i \cosh \varphi) d\varphi$$

et par suite en appelant  $ds$  l'élément de droite

$$ds = R d\varphi;$$

on pourra donc prendre au lieu de (1)

$$x_i = a_i \cosh \frac{s}{R} + b_i \sinh \frac{s}{R},$$

$s$  sera alors l'arc compté à partir du point  $a_i, \dots, a_n$ .

Si l'on assujettit la droite à passer par le point  $c_1, \dots, c_n$ , on aura, comme il est facile de voir

$$x_i = \frac{a_i \sinh \frac{s' - s}{R} + c_i \sinh \frac{s}{R}}{\sinh \frac{s'}{R}},$$

$s'$  désignant la longueur de l'arc qui joint les points  $a_1 \dots$  et  $c_1 \dots$ .

Considérons maintenant le triangle ABC, soient  $x_1, \dots, x_n$ ;  $y_1, \dots, y_n$ ;  $z_1, \dots, z_n$  les coordonnées de A, B, C. Les équations des côtés AB et AC seront en appelant  $c$  et  $b$  leurs longueurs :

$$X_i = \frac{x_i \sinh \frac{c - s}{R} + y_i \sinh \frac{s}{R}}{\sinh \frac{c}{R}},$$

$$X_i = \frac{x_i \sinh \frac{b - s}{R} + z_i \sinh \frac{s}{R}}{\sinh \frac{b}{R}}.$$

Enfin si l'on appelle angle de deux éléments  $dx_1, \dots, dx_n$  et  $dx'_1, \dots, dx'_n$  la quantité dont le cosinus est

$$\sum' \frac{dx}{ds} \frac{dx'}{ds'},$$

l'angle A de notre triangle sera donné par la formule

$$\cosh a = \cosh b \cosh c - \sinh b \sinh c \cosh A \quad (2)$$

que l'on déduirait de la formule relative à un triangle sphérique en remplaçant  $a, b, c$  par  $a\sqrt{-1}, b\sqrt{-1}, c\sqrt{-1}$ .

Je ne développe pas les calculs, identiques à ceux qui ont été faits plus haut à propos de l'espace sphérique. Nous déduisons donc de (2) des formules analogues à celles de la trigonométrie sphérique en remplaçant dans celles-ci  $a, b, c$  par  $a\sqrt{-1}, b\sqrt{-1}, c\sqrt{-1}$ .

## LA GÉOMÉTRIE EUCLIDIENNE

Tout ce que nous venons de faire jusqu'à présent est absolument rigoureux, c'est de l'analyse pure, mais c'est une analyse qui ressemble singulièrement à de la géométrie ; il y a plus, si nous supposons l'espace euclidien à trois dimensions, nous avons été assez loin pour prouver qu'il n'existe pas une seule proposition de géométrie que nous ne puissions déduire de notre analyse, à cela près que les mots point, ligne, surface, etc., y ont une autre signification qu'en géométrie, et à cela près aussi que les prétendus axiomes ou postulats de la géométrie ont été rigoureusement démontrés.

Est-il possible d'identifier la géométrie ordinaire avec les résultats de notre analyse ? Résoudre la question par l'affirmative, ce serait du coup faire disparaître tous les nuages qui planent sur les commencements de la géométrie, et ce ne serait pas acheter trop cher une méthode à laquelle on pourrait seulement reprocher les considérations d'un ordre trop élevé sur lesquelles elle s'appuie.

Malheureusement, il faut y renoncer, et notre analyse va seulement servir à nous montrer combien il y a d'erreurs dans les meilleurs traités de géométrie.

Si nous voulons identifier la géométrie ordinaire avec la pangéométrie euclidienne à trois dimensions, nous pourrons le faire en admettant que tout point de l'espace réel peut être déterminé par trois nombres ou coordonnées et qu'à trois coordonnées correspondent un point et un seul.

Ces trois coordonnées pourront être les distances du point à ce que l'on appelle trois plans rectangulaires.

Mais qu'est-ce que c'est au juste qu'un plan ?

Les définitions que l'on en donne dépendent de la notion que l'on se fait des figures capables de coïncider avec d'autres quand on les déplace sans changer leur forme (sans parler d'hypothèses que contient la définition de la droite qui sert à définir le plan), or cette notion de la fixité de la forme est vague ; comme celle de la distance, elle dépend

de nos sensations qui sont très grossières. Puisque nous ne pouvons pas dire exactement ce que c'est qu'un plan, renonçons à faire de la géométrie une science rationnelle et présentons les choses ainsi :

L'expérience nous apprend qu'il existe des surfaces bien dressées que l'on peut obtenir en usant deux corps solides par le frottement l'un contre l'autre, ces surfaces s'appliquent en tout sens l'une sur l'autre, ce sont des plans.

Sur les plans il existe des lignes telles que le bord d'une règle, lignes qui semblent coïncider dès qu'on leur donne deux points communs ; les plans et les droites convenablement associés donnent lieu à des figures plus ou moins grossières dont on constate expérimentalement certaines propriétés remarquables et dont on peut deviner d'autres propriétés, conséquences les unes des autres.

Cette première étude faite, étude dont il ne faut pas dissimuler le caractère purement expérimental et approché, on peut se demander si, à l'aide de certaines hypothèses, on ne pourrait pas relier les faits observés les uns aux autres, et c'est alors qu'intervient la pangéométrie pour répondre à la question, mais en laissant planer le vague sur la nature des choses sur lesquelles spéculait la géométrie. Nous ne savons pas, nous ne saurons jamais au juste ce qu'est un déplacement sans changement de forme : une foule de choses différentes répondent à l'idée que nous nous faisons du plan et de la ligne droite, et cela est si vrai qu'en supposant que la géométrie vulgaire soit absolument vraie, si le monde venait à changer de forme en se transformant par rayons vecteurs réciproques, nous ne nous en apercevriions pas, si les corps, en se déplaçant, restaient identiques à leurs images.

Si maintenant, au lieu de considérer les déplacements comme des substitutions orthogonales générales, nous les considérons comme des substitutions homogènes, la géométrie à trois dimensions devient la géométrie *riemannienne*, la géométrie plane devient identique à la géométrie des figures tracées sur la sphère, les théorèmes de géométrie plane, qui ne dépendent pas du postulat d'Euclide restent vrais, mais il n'existe plus de droites parallèles, et la somme des angles d'un triangle

est supérieure à  $\pi$ .

Si l'on admet qu'un déplacement est une substitution du genre de celles que nous avons considérées en pangéométrie hyperbolique, les théorèmes indépendants du postulatum d'Euclide sont encore vrais, mais entre les angles  $A, B, C$  et les côtés  $a, b, c$  d'un triangle, on a la relation

$$\cos A = \cos B \cos C + \sin B \sin C \cosh \frac{a}{R}$$

et si l'on fait  $B = \frac{\pi}{2}$  on a

$$\cos A = \sin C \cosh \frac{a}{R}$$

en sorte que  $A$  n'est réel que si

$$\sin C \cosh \frac{a}{R} \leq 1,$$

l'angle  $C$  doit donc être inférieur à  $\frac{\pi}{2}$ . Il existe donc dans le plan une infinité de droites obliques sur une autre, et qui ne rencontrent pas une perpendiculaire donnée. Si l'on pose

$$\sin C = \frac{1}{\cosh \frac{a}{R}}$$

le plus petit angle  $2p$  donné par la formule

$$\cos p = \frac{1}{\cosh \frac{a}{R}}$$

est l'angle de parallélisme, fonction comme l'on voit de  $R$  et de  $a$ . La pangéométrie hyperbolique à trois dimensions coïncide alors avec la géométrie de Lobatchefsky et de Bolyai.

Le postulatum d'Euclide est-il démontrable? Évidemment non, pas plus que cet autre postulatum : par deux points on ne peut faire passer qu'une droite, et en effet les pangéométries sphériques et hyperboliques sont aussi vraies l'une que l'autre, et pourraient aussi bien l'une que l'autre rendre compte des faits que nous observons, et si nous supposons  $R$  suffisamment grand, elles ne différeront pas beaucoup de la pangéométrie euclidienne.

## SUR LA RÉALITÉ DE L'HYPERESPACE

On peut concevoir des êtres intelligents réduits à de simples surfaces, des ombres, si l'on veut, assujettis à se mouvoir sur une surface donnée, si ces êtres ont des sens organisés de telle sorte qu'ils ne puissent avoir conscience de ce qui existe en dehors de la surface sur laquelle ils sont assujettis à demeurer, ils feront de la géométrie à deux dimensions, pour eux notre géométrie sera de la pangéométrie.

Dès lors, il se pose cette question : doit-il exister un hyperespace à plus de trois dimensions, dont notre monde tangible et visible ne serait qu'une variété à trois dimensions ? Il est bien difficile, dans l'état actuel de la science, d'y répondre. Si quelques phénomènes physiques pouvaient s'expliquer avec cette hypothèse, on pourrait peut-être placer dans l'hyperespace les âmes et Dieu, et expliquer la mort par la séparation de l'âme et du corps, l'âme étant censée toucher le corps dans l'état de vie, et cessant de le toucher après la mort, et de lui communiquer alors le mouvement.

## RÉSUMÉ

Si l'on fait de la pangéométrie à trois dimensions, les coordonnées  $x, y, z$  d'un point sont les distances de ce point aux trois plans de coordonnées.

Si nous appelons surfaces réelles ce qui sert de limite aux corps naturels, nous pouvons alors considérer trois séries de surfaces réelles se déplaçant dans l'espace (avec ou sans changement de forme, ces mots n'ont d'ailleurs aucun sens), on pourra numéroter chaque surface de chaque système de telle sorte que ces numéros varient d'une manière continue de  $-\infty$  à  $+\infty$  (et cela d'une infinité de manières), deux numéros étant affectés à des surfaces nécessairement différentes.

Si nous admettons que par un point de l'espace passent trois de nos surfaces réelles, nous pouvons appeler coordonnées de ce point les numéros des surfaces qui s'y rencontrent.

Trois de ces surfaces réelles, celles qui portent les numéros zéro,

seront, si l'on veut, les trois plans de coordonnées d'une pangéométrie à trois dimensions.

*Le plan est donc une surface arbitraire*, ou pour parler plus exactement, on peut faire toute la géométrie, telle qu'elle est enseignée dans nos livres classiques, non seulement sans définir le plan, mais en appelant plan une surface arbitraire.

1° Il est donc impossible de donner une définition précise du plan.

2° Il faut se résigner à faire de la géométrie une science physique et expérimentale.

Il faut se résigner à regarder la géométrie comme un langage propre à coordonner des faits, ou plutôt des *apparences*, et à ce point de vue elle peut à volonté être ou ne pas être euclidienne. Si l'on a choisi pour l'enseignement la géométrie euclidienne, c'est qu'elle a paru plus simple eu égard à la conformation du cerveau de nos ancêtres. Il n'y aurait rien d'étonnant, s'il existe des êtres intelligents dans la planète Mars, à ce que leur géométrie ne fût point euclidienne, en un mot à ce qu'ils aient une autre idée que nous du *déplacement sans changement de forme*.

PARIS,  
GAUTHIER-VILLARS, IMPRIMEUR-LIBRAIRE  
DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE,  
Quai des Grands-Augustins, 55.

---

1904

# SCIENTIA

Exposé et Développement des questions scientifiques  
à l'ordre du jour

---

RECUEIL PUBLIÉ SOUS LA DIRECTION DE  
MM. APPELL, D'ARSONVAL, HALLER, LIPPMANN, MOISSAN,  
POINCARÉ, POTIER, Membres de l'Institut,  
*Pour la Partie Physico-Mathématique*

ET DE  
MM. D'ARSONVAL, FOUQUÉ, GAUDRY, GUIGNARD, MAREY,  
Membres de l'Institut; HENNEGUY, Professeur au Collège de France,  
*Pour la Partie Biologique*

---

Chaque fascicule comprend de 80 à 100 pages in-8° écu, avec cartonnage spécial.

Prix du fascicule ..... 2 francs

---

A côté des revues périodiques spéciales, enregistrant au jour le jour le progrès de la Science, il nous a semblé qu'il y avait place pour une nouvelle forme de publication, destinée à mettre en évidence, par un exposé philosophique et documenté des découvertes récentes, les idées générales directrices et les variations de l'évolution scientifique.

A l'heure actuelle, il n'est plus possible au savant de se spécialiser; il lui faut connaître l'extension graduellement croissante des domaines voisins: mathématiciens et physiciens, chimistes et biologistes ont des intérêts de plus en plus liés.

C'est pour répondre à cette nécessité que, dans une série de monographies, nous nous proposons de mettre au point les questions particulières, nous efforçant de montrer le rôle actuel et futur de telle ou telle acquisition, l'équilibre qu'elle détruit ou établit, la déviation qu'elle imprime, les horizons qu'elle ouvre, la somme de progrès qu'elle représente.

Mais il importe de traiter les questions, non d'une façon dogmatique, presque toujours faussée par une classification arbitraire, mais dans la forme vivante de la raison qui débat pas à pas le problème, en détache les inconnues et l'inventorie avant et après sa solution, dans l'enchaînement de ses aspects et de ses conséquences. Aussi, indiquant toujours les voies multiples que suggère un fait, scrutant les possibilités logiques qui en dérivent, nous efforcerons-nous de nous tenir dans le cadre de la méthode expérimentale et de la méthode critique.

Nous ferons, du reste, bien saisir l'esprit et la portée de cette nouvelle collection, en insistant sur ce point, que la nécessité d'une publication y sera toujours subordonnée à l'opportunité du sujet.

## Série Physico-Mathématique.

(Adresser les Communications à M. Ad. Buhl).

1. POINCARÉ (H.). *La théorie de Maxwell et les oscillations hertziennes.*
2. MAURAIN (CH.). *Le magnétisme du fer.*
3. FREUNDLER (P.). *La stéréochimie.*
4. APPELL (P.). *Les mouvements de roulement en dynamique.*
5. COTTON (A.). *Le phénomène de Zeeman.*
6. WALLERANT (FR.). *Groupements cristallins; propriétés et optique.*
7. LAURENT (H.). *L'élimination.*
8. RAOULT (F.-M.). *Tonométrie.*
9. DÉCOMBE (L.). *La célérité des ébranlements de l'éther.*
10. VILLARD (P.). *Les rayons cathodiques.*
11. BARBILLION (L.). *Production et emploi des courants alternatifs.*
12. HADAMARD (J.). *La série de Taylor et son prolongement analytique.*
13. RAOULT (F.-M.). *Cryoscopie.*
14. MACÉ DE LÉPINAY (J.). *Franges d'interférences et leurs applications métrologiques.*

15. BARBARIN (P.). *La géométrie non euclidienne.*
16. NÉCULCÉA (E.). *Le phénomène de Kerr.*
17. ANDOYER (H.). *Théorie de la lune.*
18. LEMOINE (E.). *Géométrographie.*
19. CARVALHO (E.). *L'électricité déduite de l'expérience et ramenée aux principes des travaux virtuels.*
20. LAURENT (H.). *Sur les principes fondamentaux de la Théorie des nombres et de la géométrie.*
21. DÉCOMBE (L.). *La Compressibilité des gaz réels.*
22. GIBBS (J.-W.). *Diagrammes et surfaces thermodynamiques.*
23. POINCARÉ (H.). *La théorie de Maxwell et les oscillations hertziennes. La télégraphie sans fil.*

## Série Biologique.

(Adresser les Communications à M. le D<sup>r</sup> Langlois)

1. BARD (L.). *La spécificité cellulaire.*
2. LE DANTEC (F.). *La Sexualité.*
3. FRENKEL (H.). *Les fonctions rénales.*
4. BORDIER (H.). *Les actions moléculaires dans l'organisme.*
5. ARTHUS (M.). *La coagulation du sang.*
6. MAZÉ (P.). *Évolution du carbone et de l'azote.*
7. COURTADE (D.). *L'irritabilité dans la série animale.*
8. MARTEL (A.). *Spéléologie.*
9. BONNIER (P.). *L'orientation.*
10. GRIFFON (ED.). *L'assimilation chlorophyllienne et la structure des plantes.*
11. BOHN (G.). *L'évolution du pigment.*
12. COSTANTIN (J.). *Hérédité acquise.*
13. MENDELSSOHN (M.). *Les phénomènes électriques chez les êtres vivants.*
14. IMBERT (A.). *Mode de fonctionnement économique de l'organisme.*
- 15-16. LEVADITI (C.). *Le leucocyte et ses granulations.*
17. ANGLAS (J.). *Les Phénomènes des Métamorphoses internes.*
18. MOUNEYRAT (D<sup>R</sup> A.). *Purine et ses dérivés.*

# Série Physico-Mathématique.

N° 1. — La Théorie de Maxwell et les oscillations hertziennes, par H. POINCARÉ, de l'Institut.

## TABLE DES MATIÈRES

- CHAPITRE PREMIER. **Généralités sur les phénomènes électriques.**  
— Tentatives d'explication mécanique. Phénomènes électrostatiques. Résistance des conducteurs. Induction. Attractions électrodynamiques.
- CHAP. II. **La théorie de Maxwell.** — Rapports entre la lumière et l'électricité. Courants de déplacement. Nature de la lumière.
- CHAP. III. **Les oscillations électriques avant Hertz.** — Expériences de Feddersen. Théorie de lord Kelvin. Comparaisons diverses. Amortissement.
- CHAP. IV. **L'excitateur de Hertz.** — Découverte de Hertz. Principe de l'excitateur. Diverses formes d'excitateurs. Rôle de l'étincelle. Influence de la lumière. Emploi de l'huile. Valeur de la longueur d'onde.
- CHAP. V. **Moyens d'observation.** — Principe du résonateur. Fonctionnement du résonateur. Divers modes d'emploi de l'étincelle. Procédés thermiques. Procédés mécaniques. Comparaison des divers procédés. Radioconducteurs.
- CHAP. VI. **Propagation le long d'un fil.** — Production des perturbations dans un fil. Mode de propagation. Vitesse de propagation et diffusion. Expériences de MM. Fizeau et Gounelle. Diffusion du courant. Expériences de M. Blondlot.
- CHAP. VII. **Mesure des longueurs d'onde et résonance multiple.** — Ondes stationnaires. Résonance multiple. Autre explication. Expériences de Garbasso et Zehnder. Mesure de l'amortissement. Expériences de Strindberg. Expériences de MM. Pérot et Jones. Expériences de M. Décombe.
- CHAP. VIII. **Propagation dans l'air.** — L'experimentum crucis. Expériences de Karlsruhe. Expériences de Genève. Emploi du petit excitateur. Nature des radiations.
- CHAP. IX. **Propagation dans les diélectriques.** — Relation de Maxwell. Méthodes dynamiques. Méthodes statiques. Résultats. Corps conducteurs. Électrolytes.
- CHAP. X. **Production des vibrations très rapides.** — Ondes très courtes. Excitateur de Righi. Résonateurs. Excitateur de Bose. Récepteur de Bose.

CHAP. XI. **Imitation des phénomènes optiques.** — Conditions de l'imitation. Interférences. Lames minces. Ondes secondaires. Diffraction. Polarisation. Polarisation par réflexion. Réfraction. Réflexion totale. Double réfraction.

CHAP. XII. **Synthèse de la lumière.** — Synthèse de la lumière. Autres différences. Explication des ondes secondaires. Remarques diverses.

---

N<sup>o</sup> 2. — **Le Magnétisme du Fer**, par CH. MAURAIN, ancien élève de l'École normale supérieure, agrégé des Sciences physiques, docteur ès sciences.

## TABLE DES MATIÈRES

INTRODUCTION. — DÉFINITIONS.

CHAPITRE PREMIER. **Phénomènes généraux.** — Courbes d'aimantation. Procédés de mesure. Étude des particularités des courbes d'aimantation. Influence de la forme. Champ démagnétisant. Aimantation permanente.

CHAP. II. **Étude particulière du fer, de l'acier et de la fonte.**

CHAP. III. **Aimantation et temps.** — Influence des courants induits. Retard dans l'établissement de l'aimantation elle-même. Aimantation anormale. Aimantation par les oscillations électriques.

CHAP. IV. **Énergie dissipée dans l'aimantation.** — Influence de la rapidité de variation. Loi de Steinmetz. Variation de la dissipation d'énergie avec la température. Hystérésis dans un champ tournant.

CHAP. V. **Influence de la température.**

CHAP. VI. **Théorie du Magnétisme.**

---

N<sup>o</sup> 3. — **La Stéréochimie**, par P. FREUNDLER, docteur ès sciences, chef de travaux pratiques à la Faculté des sciences de Paris.

## TABLE DES MATIÈRES

CHAPITRE PREMIER. **Historique.**

CHAP. II. **Le carbone tétraédrique.** — Notion du carbone tétraédrique. Principe fondamental. Chaînes ouvertes. Principe de la liaison mobile. Position avantageée. Double liaison et triple liaison. Isomérie éthylénique. Chaînes fermées. Théorie des tensions. Applications diverses de la notion du carbone tétraédrique.

CHAP. III. **Le carbone asymétrique.** — Notion du carbone asymétrique. Principes fondamentaux. Chaînes renfermant plusieurs carbones asymétriques. Racémiques et indédoublables. Chaînes fermées. Vérifications expérimentales et applications de la notion du carbone asymétrique. Relations entre la dissymétrie moléculaire et la grandeur du pouvoir rotatoire. Produit d'asymétrie. Relations entre la dissymétrie moléculaire et la dissymétrie cristalline.

CHAP. IV. **La stéréochimie de l'azote.** — Représentation schématique de l'atome d'azote. Isomères géométriques de l'azote. L'azote asymétrique.

STÉRÉOCHIMIE DES COMPOSÉS DU PLATINE ET DU COBALT.

CHAP. V. **Stéréochimie et Tautomérie.**

**Bibliographie.** Ouvrages classiques. Principaux mémoires.

---

N<sup>o</sup> 4. — **Les Mouvements de roulement en dynamique,** par P. APPELL, de l'Institut.

## TABLE DES MATIÈRES

CHAPITRE PREMIER. **Quelques formules générales relatives au mouvement d'un solide.** — 1. Quelques théorèmes de cinématique. — 2. Formules. — 3. Applications. — 4. Accélération du point. — 5. Mouvement d'un corps solide autour d'un point fixe. — 6. Cas particuliers. — 7. Mouvement d'un corps solide libre.

CHAP. II. **Roulements.** — 8. Roulement et pivotement d'une surface mobile sur une surface fixe. — 9. Conditions physiques déterminant le roulement et le pivotement d'une surface mobile sur une surface fixe. — 10. Force vive d'un corps solide animé d'un mouvement de roulement et pivotement. — 11. Équation du mouvement du corps.

CHAP. III. **Applications.** — 12. Applications. — 13. Roulement d'une sphère sur une surface. — 14. Exemples. — 15 Équations du mouvement d'un solide pesant assujéti à rouler et pivoter sur un plan horizontal. — 16. Roulement et pivotement d'un corps pesant de révolution sur un plan horizontal. — 17. Applications. — 18. Recherches de M. Carvallo. — 19. Problème de la bicyclette.

CHAP. IV. **Mécanique analytique, équations de Lagrange.** — 20. Le roulement est une liaison qui ne peut pas s'exprimer en général par des équations en termes finis. — 21. Application de l'équation générale de la dynamique. — 22. Emploi des équations de Lagrange. — 23. Impossibilité d'appliquer directement les équations de Lagrange au nombre minimum des paramètres.

I. SUR LES MOUVEMENTS DE ROULEMENT.

II. SUR CERTAINS SYSTÈMES D'ÉQUATIONS AUX DIFFÉRENTIELLES TOTALES.

---

N<sup>o</sup> 5. — **Le Phénomène de Zeeman**, par  
A. COTTON, maître de conférences de physique à l'Université de  
Toulouse.

## TABLE DES MATIÈRES

CHAPITRE PREMIER. **Étude des raies spectrales.** — 1. Unités. — 2. Réseaux. — 3. Pouvoir séparateur. — 4. Spectroscope à échelons. — 5. Interféromètre. — 6. Appareil de MM. Pérot et Fabry. — 7. Conclusion. Remarque pratique.

CHAP. II. **Changements que peuvent subir les raies.** — 1. Changements dans l'aspect des raies. — 2. Constitution des raies. — 3. Changements de longueur d'onde. Effet Döppler-Fizeau. — 4. Déplacements produits par des changements de pression.

CHAP. III. **Découverte du changement magnétique des raies.** — 1. Expériences de M. Chautard. — 2. Expériences de Faraday. — 3. Expériences de M. Tait. — 4. Expériences de Fiévez. — 5. Expériences de Zeeman. Intervention de la théorie de Lorentz.

CHAP. IV. **Changement des raies d'émission parallèlement aux lignes de force.** — 1. Doublet magnétique. — 2. Polarisation circulaire des raies du doublet. — 3. Règle de MM. Cornu et Kœnig. — 4. Constitution des deux raies du doublet.

**CHAP. V. Changements observés perpendiculairement aux lignes de force.** — 1. Polarisation rectiligne des raies modifiées. — 2. Vibrations perpendiculaires aux lignes de force. — 3. Vibrations parallèles aux lignes de force. Premier cas : triplet normal. — 4. Deuxième cas : quadruplet. — 5. Troisième cas : la raie centrale est un triplet. — 6. Conclusion. Note sur un point de théorie.

**CHAP. VI. Comparaison des diverses raies.** — 1. Étude qualitative. — 2. Comparaison quantitative. — 3. Règle de M. Preston. — 4. Mesures absolues.

**CHAP. VII. Le phénomène de Zeeman et l'absorption.** — 1. Règle de Kirchhoff. — 2. Expériences sur le phénomène de Zeeman, sans spectroscopie. — 3. Étude du changement magnétique des raies renversées. — 4. Expériences d'Egouff et Georgiewsky. — 5. Travail de Lorentz.

**CHAP. VIII. Propagation de la lumière dans un champ magnétique.** — 1. Le faisceau émergeant à la même longueur d'onde. — 2. Polarisation rotatoire magnétique. — 3. Propagation des vibrations circulaires. — 4. Dispersion rotatoire. — 5. Faisceau incliné sur les lignes de force. — 6. Réflexion sur les miroirs aimantés.

**CHAP. IX. Nouvelles expériences se rattachant au phénomène de Zeeman.** — 1. Expérience de M. Righi. — 2. Expériences de MM. Macaluso et Corbino. — 3. Dispersion anormale des vapeurs de sodium (H. Becquerel). — 4. Explication de l'expérience de MM. Macaluso et Corbino.

**CHAP. X. Autres expériences.** — 1. Expérience avec le sodium, perpendiculairement au champ. — 2. Expérience de M. Voigt. — 3. Explication de la biréfringence magnétique. — 4. Propriétés de l'hyponozotide, des vapeurs d'iode et de brome.

---

N<sup>o</sup> 6. — **Groupements cristallins,** par

FRÉD. WALLERANT.

## TABLE DES MATIÈRES

**CHAPITRE PREMIER. Généralités sur la structure des corps cristallisés.**

— 1. Problème à résoudre. — 2. Différences entre les corps cristallisés et les corps amorphes. — 3. Symétrie dans les cristaux. — 4. Particule complexe et particule fondamentale. — 5. Réseau. — 6. Structure d'un

corps cristallisé. — 7. De la symétrie dans les corps cristallisés. — 8. Relations entre la symétrie de la particule complexe et celle du réseau. Éléments de symétrie limites. — 9. Structures holoédriques et structures méridriques. Domaine fondamental et domaine complexe.

CHAP. II. **Historique.**

CHAP. III. **Du rôle des éléments de symétrie de la particule dans la formation des groupements.** — 1. Groupement autour d'un axe de la particule déficient au réseau. — 2. Groupement au tour d'un axe d'une particule fondamentale. — 3. Groupement autour d'un axe limite de la particule complexe. — 4. Groupement autour des axes ternaires. — 5. Groupement symétrique par rapport à un plan de symétrie d'une particule fondamentale. — 6. Groupement par rapport à un plan de symétrie limite de la particule complexe. — 7. Groupement par rapport à un centre limite.

CHAP. IV. **Classification des groupements.**

CHAP. V. **Groupements binaires autour d'un axe ternaire.**

CHAP. VI. **Groupements parfaits.** — 1. Groupements terquaternaires. — 2. Groupements sénaires. — 3. Groupements ternaires. — 4. Groupements quaternaires.

CHAP. VII. **Groupements imparfaits.** — Cristaux ternaires. Staurotides. Feldspaths.

CHAP. VIII. **Groupements obtenus par actions mécaniques.** — Déformation des réseaux. Déformation de la particule complexe.

---

N<sup>o</sup> 7. — **L'Élimination**, par H. LAURENT, examinateur à l'École polytechnique.

## TABLE DES MATIÈRES

CHAPITRE PREMIER. **Élimination entre deux équations.** — Notions préliminaires. Développement d'une fonction rationnelle. Formules de Newton. Définition du résultant. Seconde méthode. Troisième méthode. Quatrième méthode. Cinquième méthode. Sixième méthode. Indications d'autres méthodes. Résolution d'un système à deux inconnues. Solutions multiples. Solutions singulières. Condition pour que trois équations aient une solution commune.

CHAP. II. **Élimination dans le cas général.** — Équivalences. Résolution de 3 équations. Théorème de Bezout. Méthode de Bezout. Théorème de Jacobi. Les fonctions symétriques. Nouvelle méthode. Les fonctions interpolaires. Résultante. — Son expression explicite. Étude des propriétés de la résultante. Méthode d'élimination de Labatie et analogues. Équations homogènes. Solutions doubles. Autre exemple de simplifications. Autre exemple. Étude d'une équation remarquable. Discriminants. Propriétés des solutions communes. Reconnaître si un polynôme est réductible. Développement en série. Extension partielle aux équations transcendantes. Appendice.

---

N<sup>o</sup> 8. — **Tonométrie**, par F.-M. RAOULT, membre correspondant de l'Institut. Doyen de la Faculté des sciences de Grenoble.

## TABLE DES MATIÈRES

INTRODUCTION : **Symboles et définitions.**

CHAPITRE PREMIER. **Méthodes d'observation.** — Description spéciale de la *méthode dynamique ou d'ébullition*. — Causes d'erreur, moyen de les éviter. — Ébullioscope de Raoult. — Description de la *méthode statique*. — Tonomètres différentiels de Bremer, de Dieterici. — Méthodes hygrométrique, volumétrique, gravimétrique. — Degré d'approximation.

CHAP. II. **Étude des non-électrolytes.** — La diminution de tension de vapeur dans ses rapports avec la température. — La diminution de tension de vapeur dans ses rapports avec l'abaissement du point de congélation. — La diminution de tension de vapeur dans ses rapports avec l'élévation du point d'ébullition. — La diminution de tension de vapeur dans ses rapports avec la concentration. — La diminution de tension de vapeur dans ses rapports avec la nature des corps dissous et des dissolvants. — La diminution de tension de vapeur dans ses rapports avec la densité de vapeur. — Détermination tonométrique des densités de vapeurs saturées.

CHAP. III. **Suite des non-électrolytes.** — La loi de Raoult dans ses rapports avec l'élévation du point d'ébullition. — Détermination tonométrique des chaleurs latentes de vaporisation. — Détermination tonométrique des poids moléculaires des non-électrolytes. Emploi de la méthode statique. — Emploi de la méthode dynamique. — Corrections. — Emploi du mercure comme dissolvant (Ramsay).

CHAP. IV. **Étude des électrolytes.** — Étude des dissolutions des sels dans l'eau. — Influence de la concentration, — de l'ionisation, — de l'hydratation, — de la température.

CHAP. V. **Suite des électrolytes.** — Dissolutions des sels dans l'alcool. — Dissolutions des sels dans l'éther, l'acétone, etc. — État des sels dans leurs dissolutions étendues, dans leurs dissolutions concentrées. — Résultats fournis par la tonométrie pour les poids moléculaires des sels.

BIBLIOGRAPHIE.

---

## N<sup>o</sup> 9. — **La Célérité des ébranlements de l'éther**, par L. DÉCOMBE, docteur ès sciences.

### TABLE DES MATIÈRES

INTRODUCTION.

CHAPITRE PREMIER. **Considérations générales sur l'éther.** — Classification des phénomènes physiques. — Anciens fluides. — Origine commune. — Synthèse des forces physiques. — Conservation de l'énergie. — Nature des forces physiques. — Propagation dans le vide. — Propagation par transparence. — Hypothèse de l'éther.

CHAP. II. **Histoire de l'éther.** — Lumière : Théorie de l'émission. — Théorie des ondulations. — Principe d'Huygens. — Principe de Young. — Travaux de Fresnel. — Expérience de Foucault. — Périodes de vibrations. *Chaleur* : Théorie de l'émission. Calorique. — Rayons de différentes espèces. — Spectre calorique. — Unité du spectre. — Radiations chimiques. — Analogies optiques. — Nature de la chaleur. — Limites extrêmes du spectre. *Électricité* : Polarisation rotatoire magnétique. Nombre  $v$  de Maxwell. — Théorie électromagnétique de la lumière.

CHAP. III. **Les oscillations hertziennes.** — Formule de Thomson. — Champs oscillants. — Expériences de Feddersen. — Excitateur. — Excitateur de Hertz. — Excitateur de Lodge. — Excitateur de Blondlot. — Résonateur. — Propagation le long d'un fil. — Transparence électromagnétique. — Réflexion métallique. — Réfraction. — Interférences électromagnétiques. — Interférences dans l'espace. — Interférences le long des fils. — Expériences de Righi. — Polarisation. — Double réfraction. — Télégraphie sans fils. — Radioconducteur de Branly. — Conclusions.

CHAP. IV. **La formule de Newton.** — Hypothèses. — Centre de vibration. — Ondes sphériques. — Transversalité des vibrations. — Ondes planes. — Formule de Newton. — Influence du milieu. — Théorie de Fresnel. — Théorie de Neumann et de Mac-Cullagh. — Réfraction. — Dispersion. — Cas des phénomènes électriques. — Pouvoir inducteur spécifique. — Perméabilité magnétique.

CHAP. V. **La vitesse de la lumière.** — Essais de Galilée. — Les Académiciens de Florence. — Observations de Røemer. — Calculs de Delambre. — Aberration. — Méthodes physiques. — Méthodes de la roue Dentée. — Expériences de Fizeau. — Expériences de M. Cornu. — Expériences de Young et Forbes. — Méthode du miroir tournant. — Expériences de Foucault. — Expériences de Fizeau et Breguet. — Expériences de Foucault. — Expériences de Micheson. — Expériences de Newcomb.

CHAP. VI. **La vitesse de l'électricité.** — Premiers essais. — Principe du miroir tournant. — Expérience de Wheatstone. — Méthode des longitudes. — Expériences de Fizeau et Gounelle. — Expériences de Guillemain et Burnouf. — Expériences de Siemens. — Examen critique des méthodes précédentes.

CHAP. VII. **La vitesse de propagation de l'onde électromagnétique.** — Expériences de Blondlot 1893. — Expériences de Blondlot 1891. — Mesures directes. — Difficultés. — Expériences de Duane et de Trowbrige. — Expériences de Saunders. — Conclusion.

CHAP. VIII. **La dispersion dans le vide.** — Considérations générales. — Observation des satellites de Jupiter. — Observation des étoiles variables. — Observation de MM. Young et Forbes. — Observation des étoiles orbitales. — Principe de Döpler-Fizeau. — Analyse spectrale. — Remarque de M. Tikhoff. — Conclusion.

CHAP. IX. **L'éther de Maxwell.** — Constitution de l'éther. — Théorie de Maxwell. — Tourbillons moléculaires. — Déplacement électrique. — Courant électrique. — Courants d'induction. — Vitesse de propagation. — Nombre  $v$  de Maxwell. — Théorie électromagnétique de la lumière. — Dispersion dans le vide. — Interférences.

---

N<sup>o</sup> 10. — **Les Rayons cathodiques,** par  
P. VILLARD, docteur ès sciences.

## TABLE DES MATIÈRES

- CHAPITRE PREMIER. **Appareils.** — Appareils à raréfier les gaz. — Préparation de l'oxygène pur. — Préparation de l'hydrogène pur et sec. — Sources d'électricité.
- CHAP. II. **Phénomènes électriques dans les gaz raréfiés.** — Lumière positive. — Gaine négative. — Espace obscur de Hittorf. — Résistance électrique des tubes à décharges. — Discontinuité de la décharge.
- CHAP. III. **L'émission cathodique.** — Découverte des rayons cathodiques. — Le faisceau cathodique.
- CHAP. IV. **Propriétés des rayons cathodiques.** — Phénomène de phosphorescence. — Effets mécaniques. — Effets caloriques. — Émission des rayons Roentgen. — Propagation rectiligne des rayons cathodiques. — Expérience de la croix.
- CHAP. V. **Électrisation des rayons cathodiques.** — Expériences diverses. — Expériences de M. J. Perrin.
- CHAP. VI. **Électrisation des tubes à décharges.** — Chute de potentiel à la cathode. — Capacité des tubes à décharges.
- CHAP. VII. **Actions électrostatiques.** — Action d'un champ électrique sur les rayons cathodiques. — Calcul de la déviation. — Mesure de la chute de potentiel à la cathode. — Absence d'action réciproqué entre deux rayons cathodiques.
- CHAP. VIII. **Action d'un champ magnétique sur les rayons cathodiques.** — Déviation magnétique. — Calcul de la déviation. — Relation entre la déviation et le potentiel de décharge. — Constance du rapport  $\frac{e}{m}$ . — Conséquence des lois de l'action magnétique. — Concentration des rayons cathodiques dans un champ magnétique. — Rayons parallèles au champ.
- CHAP. IX. **Vitesse des rayons cathodiques.** — Méthodes indirectes de J.-J. Thomson. — Valeur de  $\frac{e}{m}$  et de  $V$ . — Expériences de M. E. Wiechert.
- CHAP. X. **Hétérogénéité des rayons cathodiques.** — Expérience de M. Birkeland. — Dispersion électrostatique. — Expérience de M. Deslandres. — Cause de la dispersion magnétique ou électrique.
- CHAP. XI. **Actions chimiques des rayons cathodiques.** — Colorations produites par les rayons. — Photo-activité des sels colorés par les rayons. — Phénomènes de réduction. — Production d'ozone.

- CHAP. XII. **Phénomènes divers.** — Cas particulier d'émission cathodique. — Passage des rayons au travers des lames minces. — Diffusion des rayons cathodiques. — Réflexion et réfraction apparentes. — Évaporation électrique. — Phénomènes d'oscillation dans le tube à décharge. — Kanalstrahlen ou rayons de Goldstein. — Surfaces interférentielles de Jaumann. — Rayons cathodiques non déviables.
- CHAP. XIII. **Expérience de M. Lénard.** — Rayons cathodiques dans l'air à la pression ordinaire. — Rayons cathodiques dans les gaz à diverses pressions.
- CHAP. XIV. **La formation des rayons cathodiques.** — Rôle de l'électrisation des parois. — Afflux cathodique. — Émission. — Propagation.
- CHAP. XV. **Nature de la matière radiante.** — Union de la matière radiante. — Rayons cathodiques. — Rayons cathodiques diffusés. — Afflux cathodique. — Rayons de Goldstein. — Hydrogène cathodique.
- CHAP. XVI. **Les corps radio-actifs et les rayons cathodiques naturels.** — Rayons uraniques. — Radio-activité induite. — Rayons déviables du radium. — Électrisation des rayons du radium.
- 

## N<sup>o</sup> 11. — **Production et Emploi des courants alternatifs**, par L. BARBILLION, docteur ès sciences.

### TABLE DES MATIÈRES

INTRODUCTION.

CHAPITRE PREMIER. **Rappel des quelques notions théoriques relatives à l'induction électromagnétique et aux machines à courant continu.** A. Phénomènes d'induction. — B. Machines dynamo-électriques à courant continu.

CHAP. II. **Étude d'un courant alternatif.** — A. Caractéristique d'un courant alternatif. — B. Étude d'un circuit parcouru par un courant alternatif simple sinusoïdal. — C. Courant polyphasé et champs tournant.

CHAP. III. **Classification des machines d'induction.** — Expression du travail électromagnétique développé dans une machine d'induction.

CHAP. IV. **Machines génératrices à courants alternatifs.**

CHAP. V. **Moteurs à courants alternatifs.** — Moteurs asynchrones. — Moteurs asynchrones polyphasés. — Moteurs asynchrones monophasés. — Comparaison des moteurs synchrones et asynchrones. — Moteurs monophasés. — Moteurs polyphasés.

CHAP. VI. **Transformation du courant.** — A. Transformateurs statiques. — B. Convertisseurs rotatifs. — C. Commutatrices.

---

N<sup>o</sup> 12. — **La Série de Taylor et son prolongement analytique**, par JACQUES HADAMARD.

## TABLE DES MATIÈRES

CHAPITRE PREMIER. Propriétés fondamentales des fonctions analytiques.

CHAP. II. Nature et difficulté du problème.

CHAP. III. Méthodes directes.

CHAP. IV. Les séries qui admettent le cercle de convergence comme ligne singulière.

CHAP. V. Recherches des singularités de nature déterminée.

CHAP. VI. Méthodes d'extension. — Les séries de polynômes et le théorème de M. Mittag-Leffler.

CHAP. VII. Méthodes de transformation.

CHAP. VIII. Application des principes généraux du calcul fonctionnel.

CHAP. IX. Généralisations diverses.

CHAP. X. Applications.

CONCLUSIONS. — Bibliographie.

---

N<sup>o</sup> 13. — **Cryoscopie**, par F.-M. RAOULT, membre correspondant de l'Institut, doyen de la Faculté des sciences de Grenoble.

## TABLE DES MATIÈRES

**PREMIÈRE PARTIE. — Principes généraux.** — Symboles et définitions. — Historique. — Phénomènes qui accompagnent la congélation. — Surfusion. — Généralités sur la température de congélation des mélanges liquides. — Nature de la glace formée dans les dissolutions. — Solutions solides. — Température de congélation des dissolutions. — Causes d'erreur. — Corrections. — Influence de la température de l'enceinte. — Influence de l'étui de glace, de l'agitation, de l'air dissous.

**DEUXIÈME PARTIE. — Méthode d'observation.** — Cryoscopes usuels de Raoult, Paterno et Nasini, Amvers, Beckmann, Eykmann. — Cryoscopes de précision de Roloff, Jones, Wildermann, Obegg, Laomis. — Cryoscope de précision de Raoult. — Dispositif pour les températures élevées.

**TROISIÈME PARTIE. — Cryoscopie des non-électrolytes** (Substances organiques). — Influence de la concentration. — Influence de la nature des corps dissous. — Loi de Raoult. Sa généralité. Anomalies. — Influence de la nature des dissolvants; loi de Raoult-Van 't Hoff. — Détermination des poids moléculaires. — Cryoscopie des composés minéraux non-électrolytes. — Constitution des corps moléculaires dissous (métaux, métalloïdes, composés organiques).

**QUATRIÈME PARTIE. — Cryoscopie des électrolytes** (Composés salins). — Influence de la concentration. — Poids moléculaire des sels dans d'autres dissolvants que l'eau.

---

N<sup>o</sup> 14. — **Franges d'interférence et leurs applications métrologiques**, par J. MACÉ DE LÉPINAY, professeur à la Faculté des sciences de Marseille.

## TABLE DES MATIÈRES

**PREMIÈRE PARTIE. — CHAPITRE PREMIER. Production des franges d'interférence.**

CHAP. II. Appareils interférentiels.

CHAP. III. Sur l'emploi des sources lumineuses étendues.

CHAP. IV. Apparitions et disparitions périodiques des franges d'interférence.

CHAP. V. Sources.

**DEUXIÈME PARTIE. — CHAPITRE PREMIER. Généralités.**

CHAP. II. Détermination d'un ordre d'interférence (Partie fractionnaire).

CHAP. III. Détermination d'un ordre d'interférence (Partie entière).

CHAP. IV. Comparaison de longueurs.

CHAP. V. Correction progressive des données primitives. Applications.

**TROISIÈME PARTIE. — CHAPITRE PREMIER. Préliminaires.**

CHAP. II. Comparaison de longueurs d'onde à l'étalon prototype du mètre.

CHAP. III. Mesures optiques de longueurs.

CHAP. IV. Application à la détermination de la masse du décimètre cube d'eau distillée, privée d'air à 4°.

---

N° 15. — **La Géométrie non euclidienne**, par  
P. BARBARIN.

## TABLE DES MATIÈRES

CHAPITRE PREMIER. **Considérations générales et historiques.** —

1. Euclide. — 2. Premières idées touchant la géométrie non euclidienne. —
3. Les fondateurs de la géométrie non euclidienne. Lobatschewsky, Bolyai, Riemann. Leurs continuateurs.

CHAP. II. **Les définitions et postulats d'après Euclide. Les trois géométries.**

4. Les définitions. — 5. Les postulats. — 6. Les définitions de la droite et du plan. — 7. Programme des principales propositions élémentaires de la géométrie générale. — 8. Les hypothèses de Saccheri. — 9. Région normale. — 10. Extension de la région normale. — 11. Hypothèse de l'angle droit, géométrie euclidienne. — 12. Hypothèse de l'angle aigu, géométrie lobatschewskienne. — 13. Hypothèse de l'angle obtus, géométrie riemannienne. — 14. Étude inverse.

CHAP. III. **La distance comme notion fondamentale.** — 15. Les travaux de M. de Tilly. — 16. La droite et le plan d'après Cauchy.

- CHAP. IV. **La géométrie générale dans le plan et dans l'espace.** — 17. La géométrie générale dans le plan. — 18. La géométrie générale dans l'espace. — 19. Théorie des droites et plans qui ont une normale commune. — 20. Théorie des droites et plans parallèles.
- CHAP. V. **La trigonométrie.** — 21. Formules des triangles. — 22. Formules des quadrilatères, constructions fondamentales.
- CHAP. VI. **Mesures des aires et volumes.** — 23. Aires planes, triangle et polygone. — 24. Aires des surfaces courbes. — 25. Volumes.
- CHAP. VII. **Les contradicteurs de la géométrie non euclidienne.** — 26. Objections principales. — 27. Objection des sphères et pseudo-sphères. — 28. Objection du triangle équilatéral. — 29. Autres objections.
- CHAP. VIII. **La géométrie physique.** — 30. La forme géométrique de notre univers. — 31. Mesures relatives au paramètre. — Note I. — Sur le théorème de M. Cl. Vidal. — Note II. — Sur deux quadrilatères bi-rectangles et isocèles de la région normale.
- 

N<sup>o</sup> 16. — **Le Phénomène de Kerr,** par  
E. NÉCULCÉA.

## TABLE DES MATIÈRES

BIBLIOGRAPHIE. — PRÉFACE. — INTRODUCTION.

**PREMIÈRE PARTIE.** — *Expériences.* — CHAPITRE PREMIER. — **Diélectriques solides.** — Premières expériences de J. Kerr. — Expériences de H. Brongersma. — Conclusion.

CHAP. II. **Diélectriques liquides.** — Expériences de J. Kerr. — Corps électro-optiquement positifs. — Corps électro-optiquement négatifs. — Résultats qualitatifs. — Expériences de Röntgen. — Expériences de Brongersma. — Résultats quantitatifs. — Phénomène de Kerr dans un champ électrique uniforme. — Projection du phénomène. — Mesures absolues de la constance de Kerr.

CHAP. III. **Disparition instantanée du phénomène de Kerr.** — Méthode de M. R. Blondlot. — Expériences de MM. Abraham et J. Lemoine.

**DEUXIÈME PARTIE.** — *Théorie.* — CHAPITRE PREMIER. — **Essais théoriques de M. F. Pockels.**

CHAP. II. **Théorie de M. W. Voigt.** — Généralités. — Introduction du champ électrique extérieur. — Corps transparents. — Cas d'une bande d'absorption. — Conclusions. — Corps actifs. — Analogie du phénomène de Zeeman. — Corps isotropes; phénomènes de Kerr. — Généralisation de théorie. — Conclusion.

**TROISIÈME PARTIE.** — *Phénomène électro-optique analogue au phénomène de Zeeman.*

---

N<sup>o</sup> 17. — **Théorie de la lune**, par H. ANDOYER, professeur adjoint à la Faculté des sciences de l'Université de Paris.

## TABLE DES MATIÈRES

- CHAPITRE PREMIER. Mise en équations et réduction du problème.
- CHAP. II. Étude des équations de la théorie solaire du mouvement de la lune. — Forme de la solution.
- CHAP. III. Calcul effectif des principales inégalités solaires du mouvement de la lune.
- CHAP. IV. Formation des équations qui déterminent les inégalités secondaires du mouvement de la lune.
- CHAP. V. Détermination de quelques inégalités secondaires périodiques du mouvement de la lune.
- CHAP. VI. Influence des inégalités séculaires du soleil sur le mouvement de la lune.
- 

N<sup>o</sup> 18. — **Géométrographie** ou art des constructions géométriques, par E. LEMOINE.

## TABLE DES MATIÈRES

AVANT-PROPOS.

**PREMIÈRE PARTIE.** — But de la géométrographie. — Construction des problèmes classiques.

**DEUXIÈME PARTIE.** — Problèmes relatifs aux pôles et polaires, aux axes et aux centres radicaux, à la moyenne géométrique entre deux droites. — Le rapport anharmonique ; l'involution. — Symboles du «*Streckenübertrager*» de M. Hilbert.

APPENDICE.

---

N<sup>o</sup> 19. — **L'Électricité déduite de l'expérience et ramenée aux principes des travaux virtuels**, par M.-E. CARVALLO, docteur ès sciences, agrégé de l'Université, examinateur de mécanique à l'École polytechnique.

## TABLE DES MATIÈRES

PRÉFACE.

**PREMIÈRE PARTIE.** — Les courants d'induction d'après Helmholtz et Maxwell. — 1. INTRODUCTION.

**CHAPITRE PREMIER. Théorie de Helmholtz.** — § 1<sup>er</sup>. *Fonction des forces électromagnétiques. Induction magnétique.* — 2. Introduction. — 3. Loi du flux de la force magnétique. — 4. Fonction des forces électromagnétiques. — 5. Induction magnétique. — 6. Conclusions. — § 2. *Équation de l'énergie. Force électromotrice induite. Selfinduction.* — 7. Introduction. — 8. Équation de l'énergie d'après Helmholtz. — 9. Inertie propre d'un courant. Selfinduction. — 10. Force électromotrice induite. — 11. Force électromotrice de selfinduction. — 12. Conclusions. — § 3. *Courants en régime variable. Interprétations mécaniques.* — 13. Introduction. — 14. Équation du courant induit dans un circuit sans pile. — 15. Courants des piles en régime variable. — 16. Interprétations mécaniques. Principes de l'énergie et des travaux virtuels. — 17. Conclusions.

**CHAP. II. Équation générale de la dynamique.** — § 1<sup>er</sup>. *Théorème des travaux virtuels.* — 18. Introduction. — 19. Théorème des travaux virtuels. Équation générale de la dynamique. — 20. Extension de l'idée de force, déduite de la notion d'énergie. Force électromotrice. — 21. Conclusions. — § 2. *Travail des forces d'inertie. Équations de Lagrange.* — 22. Introduction. — 23. Expression de Lagrange pour le travail des forces d'inertie. — 24. Théorème des forces vives. — 25. Modification des formules de Lagrange quand les paramètres de mobilité ne sont pas des coordonnées proprement dites. — 26. Conclusions.

**CHAP. III. Théorie de Maxwell.** — § 1<sup>er</sup>. *Les courants induits d'après Maxwell.* — 27. Introduction. — 28. Théorie de Maxwell. — 29. Équations de Lagrange pour les circuits filiformes, mobiles et de forme invariable. — 30. Comparaison des équations de Lagrange avec l'expérience. — 31. Équations de Lagrange pour les circuits filiformes et déformables. — 32. Conclusions. — § 2. *Recherches de Maxwell sur l'énergie cinétique des courants mobiles.* — 33. Introduction. — 34. Forces d'inertie calculées par les équations de Lagrange. — 35. Force électromotrice. — 36. Force pondéromotrice. — 37. Conclusion. — § 3. *Du rôle des aimants dans la théorie de Maxwell, d'après M. Sarrau.* — 38. Introduction. — 39. Hypothèse d'Ampère. — 40. Approche d'un circuit vers un aimant permanent. — 41. Paradoxe relatif à l'énergie. — 42. Force coercitive de l'aimant. — 43. Conclusions.

**CONCLUSIONS DE LA PREMIÈRE PARTIE.** — 44. Les forces électromagnétiques et magnétiques sont des forces d'inertie comme les forces électromotrices d'induction.

**DEUXIÈME PARTIE. L'électricité ramenée au principe des travaux virtuels.** — 45. INTRODUCTION.

**CHAPITRE PREMIER. Théorie de l'électricité dans les corps en repos.** — § 1<sup>er</sup>. *Extension des lois de Kirchhoff aux conducteurs à trois dimensions.* — 46. Introduction. — 47. Notions relatives aux courants. Intensité, flux, vitesse du courant. — 48. Extension de la première loi de Kirchhoff. — 49. Forces électromotrices dans les conducteurs à trois dimensions. — 50. Force électromotrice due à l'effet Joule. — 51. Force électromotrice due à l'effet Peltier. — 52. Extension de la deuxième loi de Kirchhoff. — 53. Conclusions. — § 2. *Extension des lois de Kirchhoff au régime variable et aux diélectriques.* — 54. Introduction. — 55. Charge d'un condensateur par le courant d'une pile. — 56. Extension de la première loi de Kirchhoff. — 57. Extension de la deuxième loi de Kirchhoff. — 58. Vérifications expérimentales. — 59. Champ électrostatique créé par les courants. — 60. Conclusions. — § 3. *Équations générales de l'électrodynamique dans les corps en repos.* — 61. Introduction. — 62. Interprétation dynamique des deux lois fondamentales. — 63. Équations indéfinies dans un milieu continu (I et II). — 64. Équations à la surface de séparation de deux milieux (III). — 65. Équivalence des deux lois fondamentales avec le système des équations I, II et III. — 66. Comparaison de notre théorie avec celle de Maxwell. — 67. Conclusions. — § 4. *Le problème de l'électrodynamique et l'électro-optique.* — 68. Introduction. — 69. Loi de Biot et Savart. — 70. Équations du courant de conduction et de la force

électrique. — 71. Détermination du problème de l'électrodynamique. — 72. Rapprochement avec la lumière. Constitution des diélectriques. — 73. Conclusions. — § 5. *Énergie électrique*. — 74. Introduction. — 75. Équation de l'énergie. — 76. Diverses espèces d'énergie électrique. — 77. Travail des forces appliquées. Puissance des générateurs; énergie potentielle des diélectriques. — 78. Travail des forces d'inertie. Énergie électrocinétique. — 79. Conclusions.

CHAP. II. **Théorie de l'électricité dans les corps en mouvement.** — § 1<sup>er</sup>. *La théorie de Maxwell et la roue de Barlow*. — 80. Introduction. — 81. Les équations de Lagrange mises en défaut par la roue de Barlow. — 82. Véritables équations de la roue de Barlow. — 83. Adaptation de la théorie de Maxwell à la roue de Barlow. — 84. Conclusions. — § 2. *Lois de l'inertie électrique*. — 85. Introduction. — 86. Examen critique des énoncés de Maxwell. Deux forces électromotrices d'induction. — 87. Trois lois de l'inertie électrique. — 88. Vérifications expérimentales. — 89. Conclusions. — § 3. *emphlectrodynamique des corps en mouvement*. — 90. Introduction. — 91. Les deux lois fondamentales étendues aux corps en mouvement. — 92. Équations de l'électrodynamique pour les corps en mouvement. — 93. Équation de l'énergie. — 94. Conclusions.

CONCLUSION GÉNÉRALE. — 95. Ma conclusion est l'idée même de ce livre.

---

N<sup>o</sup> 20. — **Sur les principes fondamentaux de la théorie des nombres et de la géométrie**, par H. LAURENT, examinateur à l'École polytechnique.

## TABLE DES MATIÈRES

INTRODUCTION.

Égalité et addition. — Quantités. — Propriétés des quantités. — Les nombres. — Multiplication et division. — Les incommensurables. — Logarithmes. — CONCLUSION. — La pangéométrie. — Les espaces et leurs dimensions. — Déplacements euclidiens. — Distances. — Figures égales. — Ligne droite. — Angles. — Trigonométrie. — Perpendiculaire commune à plusieurs droites. — Contacts. — Longueurs. — Pangéométrie sphérique. — Trigonométrie sphérique. — Pangéométrie hyperbolique. — La géométrie euclidienne. — RÉSUMÉ.

---

N° 21. — **La Compressibilité des gaz réels**, par  
L. DÉCOMBE, docteur ès sciences.

## TABLE DES MATIÈRES

La loi de Mariotte. — Compressibilité des gaz aux pressions élevées.  
— Compressibilité des gaz aux faibles pressions. — Influence  
de la température sur la compressibilité des gaz. — Le point  
critique. — Fonction caractéristique. — Les états correspondants.  
— Compressibilité des mélanges gazeux.

---

N° 22. — **Diagrammes et Surfaces thermo-  
dynamiques**, par J.-W. GIBBS. Traduction de M. G. ROY, chef  
des travaux de physique à l'Université de Dijon, avec une introduction  
de M. B. BRUNHES, professeur à l'Université de Clermont.

## TABLE DES MATIÈRES

I. Méthodes graphiques dans le thermodynamique des fluides. —  
II. Méthode de représentation géométrique des propriétés  
thermodynamiques des corps par des surfaces.

---

*Sous presse :*

N° 23. — **La Théorie de Maxwell et les  
oscillations hertziennes. La Télégraphie sans  
fil**, par H. POINCARÉ.

# Série Biologique.

N<sup>o</sup> 1. — **La Spécificité Cellulaire**, ses conséquences en biologie générale, par L. BARD, professeur à la Faculté de médecine de Lyon.

## TABLE DES MATIÈRES

INTRODUCTION.

CHAPITRE PREMIER. **L'indifférence et la spécificité cellulaire.** —

Indifférence, spécificité, éclectisme. — Spécificité absolue. — Blastèmes. — Tissu germinatif commun. — Dualité des épithéliums et des substances conjonctives. — Retour à l'état embryonnaire. — Métaplasies. — Restrictions progressives de l'indifférence. — Théories idioblastiques; activité ou quantité inégales des idioblastes. — Prosoplastie et anaplastie. Éclectisme actuel.

CHAP. II. **La fixité héréditaire des types cellulaires dans les organismes adultes.** —

Similitudes des cellules naissantes. — Fixité absolue des types cellulaires dans les tumeurs. — Multiplicité indéfinie des espèces. — Rénovations physiologiques. — Substitutions d'espèces. — Transformations physiologiques évolutives. — Placentas extra-utérins. — Modifications morphologiques pathologiques. — Régénérations de tissus, d'organes. — Pseudarthroses. — Régénérations chez les animaux inférieurs. — Hétéromorphose. — Spécificité des cellules dans le règne végétal.

CHAP. III. **La constitution des espèces cellulaires au cours du développement.** —

Adaptation progressive aux conditions extérieures. — Détermination héréditaire. — Tumeurs à tissus multiples. — Dissociations graduelles des espèces. — Multiplications et dédoublements. — Cellules complexes et cellules simples. — Cellules totales initiales; cellules composites, intermédiaires et transitoires; cellules terminales. — Théorie de l'arbre histogénique, cellules nodales. — Cellules génératrices et cellules somatiques. — Théorie de de Vries, de Hausemann, de Nussbaum, de Weissmann. — Problème de l'isotropie de l'œuf; postgénération. — Théorie des trois feuilletts de Remack, leur spécificité, leur genericité, leur détermination. — Nature somatique des cellules génératrices. — Constitution des espèces cellulaires chez les végétaux.

CHAP. IV. **La spécificité cellulaire et les grands problèmes de la biologie générale.** — Théorie physique de la vie, force spéciale. — Équivalence chimique des cellules naissantes. — Rôle des substances dérivées, extra et intra-cellulaires, dans la vie collective des métazoaires. — Modalités multiples de la vie cellulaire, complémentaires, créées par des décompositions de forces. — Vie blanche et vies colorées. — Polarisation symétrique des cellules sexuelles. — Polyzoïsme. — Induction vitale. — Régulation des proliférations. — Pathogénie des tumeurs. — Influence réciproque à distance des cellules somatiques et des cellules génératrices. — Hérité des propriétés acquises. — Mécanisme d'action des milieux sur l'hérité. — Influence du fœtus sur sa mère. — Imprégnation, télégonie. — Constitution des espèces vivantes par dissociation. — Harmonie de l'ensemble des êtres vivants.

Index bibliographique des publications de l'auteur ayant trait à la spécificité cellulaire.

---

N<sup>o</sup> 2. — **La Sexualité**, par FÉLIX LE DANTEC, docteur ès sciences.

## TABLE DES MATIÈRES

INTRODUCTION.

CHAPITRE PREMIER. **Phénomènes essentiels de la reproduction.** — Assimilation. — Génération agame. — Hérité.

CHAP. II. **Notion de la sexualité.** — Plastides incomplets par mérotomie ou division hétérogène. — Plastides incapables par sénescence. — Deux manières d'envisager la sexualité. — Apparition du dimorphisme dans les éléments reproducteurs. — Plastides équilibrés et déséquilibrés.

CHAP. III. **Formation des produits sexuels chez les animaux supérieurs.**

CHAP. IV. **Les caractères sexuels secondaires.** — Sexe somatique. — Sélection sexuelle. — Aspect général du dimorphisme sexuel. — Résultats de la castration. — Hermaphrodites.

CHAP. V. **La Fécondation.** — Hybrides.

CHAP. VI. **La parthénogenèse.** — Parthénogenèse artificielle, occasionnelle, partielle, saisonnière, juvénile, totale.

CHAP. VII. **Le sexe du produit dans la reproduction sexuelle et la parthénogenèse.**

CHAP. VIII. **Époque de la détermination du sexe.** — Expériences sur les têtards. — Expériences sur les papillons. — Expériences sur les plantes. — Observations sur les mammifères et l'homme. — Détermination du sexe dans l'œuf fécondé. — Détermination du sexe par les conditions du développement embryonnaire.

CHAP. IX. **Récapitulation.**

CHAP. X. **Théorie du sexe.** — Attraction des éléments sexuels. — Fécondation. — Loi du plus petit coefficient. — Phénomènes consécutifs à la fécondation. — Hérité à la première génération. — Métis. — Hybrides. — Formation des produits sexuels. — Sénescences des Infusoires. — Produits de la 2<sup>e</sup> génération. — Métis. — Hybrides.

**Conclusion.**

---

N<sup>o</sup> 3. — **Les Fonctions rénales**, par H. FRENKEL, professeur agrégé à la Faculté de médecine de Toulouse.

## TABLE DES MATIÈRES

CHAPITRE PREMIER. — **Structure du rein.** — Tubes ou canalicules urinaires. Vaisseaux. Tissu conjonctif. Nerfs. Histoire du développement.

CHAP. II. **L'urine.** — Caractères physiques de l'urine. Concentration moléculaire des urines. Caractères chimiques de l'urine. Origine des éléments de l'urine. Variations de la composition de l'urine. Propriétés biologiques. Toxicité urinaire. Technique de la recherche de la toxicité urinaire. Importance de l'examen biologique des urines.

CHAP. III. **Physiologie de la sécrétion rénale.** — Le rein considéré comme filtre. Théorie de Ludwig. Le rein considéré comme glande. Théorie de Bowmann-Heidenhain. Action des substances diurétiques sur la sécrétion rénale. Innervation rénale. Résorption intrarénale.

CHAP. IV. **La sécrétion rénale interne.**

CHAP. V. **Physiologie pathologique de la sécrétion rénale.** — Les oliguries et les anuries. Les polyuries. Les albuminuries. Rôle du rein dans la production de la glycosurie.

CHAP. VI. De la **perméabilité et de l'insuffisance rénales.** —  
Perméabilité rénale. Méthodes d'examen de la perméabilité rénale.  
Perméabilité rénale au point de vue qualitatif. Insuffisance rénale. Causes  
de l'insuffisance rénale. Diagnostic de l'insuffisance rénale. Signes de  
l'insuffisance rénale.

**Conclusions.**

---

N<sup>o</sup> 4. — **Les Actions moléculaires dans l'organisme,** par H. BORDIER, professeur agrégé à la Faculté de médecine de Lyon.

## TABLE DES MATIÈRES

INTRODUCTION.

CHAPITRE PREMIER. **Actions moléculaires dans les solides.** —  
Élasticité. Élasticité des corps inorganiques. Élasticité des corps organiques.  
Élasticité des muscles courbes. Élasticité des membranes. Phénomènes  
d'adhésion. Adhérence des surfaces articulaires.

CHAP. II. **Actions moléculaires dans les liquides.** — Tension superficielle.  
Théorie du professeur Imbert relative à la contraction musculaire. Muscles  
lisses. Muscles striés. Phénomènes électriques résultant d'une variation de  
la tension superficielle.

CHAP. III. **Actions moléculaires entre liquides différents.** — Osmose.  
Phénomènes électriques liés aux actions moléculaires de l'osmose.

CHAP. IV. **Actions moléculaires entre solides et liquides.** — Phénomènes  
capillaires. Chapelets capillaires. Phénomènes d'imbibition. Filtration.  
Phénomènes de dissolution. Pression osmotique. Isotonie. Méthode de  
H. de Vries. Méthode de Hamburger. Méthode cryoscopique. Liquides  
de l'organisme. Sécrétion de l'urine. Pression osmotique des liquides de  
l'estomac. Rôle de la pression osmotique dans la résorption.

CHAP. V. **Actions moléculaires entre solides et gaz.** — Phénomènes  
d'adhésion gazeuse. Atmosphères adhérentes dans l'organisme.

CHAP. VI. **Actions moléculaires entre liquides et gaz.** — Dissolution des  
gaz.

CHAP. VII. **Actions moléculaires dans les gaz.** — Diffusion des gaz.  
Osmose des gaz.

---

N<sup>o</sup> 5. — **La Coagulation du sang**, par MAURICE ARTHUS, professeur de physiologie et de chimie physiologique à l'Université de Fribourg (Suisse).

## TABLE DES MATIÈRES

CHAPITRE PREMIER. Nos connaissances sur la coagulation du sang vers 1890.

CHAP. II. La présence de sels de chaux dissous dans le plasma est une condition nécessaire de la coagulation du sang.

CHAP. III. Du rôle des sels solubles de chaux dans le phénomène de coagulation du sang. — Travaux d'Arthus et Pagès, de Pekelharing, de Lilienfeld, d'Alex, Schmidt, d'Hammarsten.

CHAP. IV. Du fibrinferment, de sa nature, des conditions de sa production, d'après Pekelharing.

CHAP. V. Des propriétés du sang non spontanément coagulable, obtenu par injection intravasculaire de protéoses, et de la cause de son incoagulabilité.

CHAP. VI. Du mode et du lieu de formation, de la nature et des propriétés de la substance anticoagulante engendrée par l'organisme du chien sous l'influence des injections intraveineuses de protéoses.

CHAP. VII. De l'immunité naturelle ou acquise contre les injections intraveineuses de protéoses.

CHAP. VIII. Du pouvoir anticoagulant du sérum de sang d'anguilles, de certains extraits de tissus, de l'extrait de sangsues.

CHAP. IX. Des substances qui peuvent provoquer des coagulations intravasculaires : nucléoalbumines, venin de serpent, colloïdes de synthèse.

BIBLIOGRAPHIE.

---

N<sup>o</sup> 6. — **Évolution du Carbone et de l'Azote dans le monde vivant**, par P. MAZÉ, ingénieur-agronome, docteur ès sciences, préparateur à l'Institut Pasteur.

## TABLE DES MATIÈRES

INTRODUCTION.

CHAPITRE PREMIER. **Origines du carbone organique.** — L'acide carbonique de l'air source du carbone des plantes. Élaboration des hydrates de carbone dans les feuilles. Les diastases des feuilles. Mécanisme de la formation des hydrates de carbone dans les feuilles. Assimilation du carbone organique du sol. Formation des matières grasses.

CHAP. II. **Origines de l'azote organique.** — Nutrition azotée des plantes. Intervention de l'azote libre. Formation des composés quaternaires dans les végétaux supérieurs.

CHAP. III. **Dégradation de la matière organique.** — Rôle des animaux. Rôle des infiniment petits.

---

## N<sup>o</sup> 7. — L'Irritabilité dans la série animale,

par le D<sup>r</sup> DENIS COURTADE, ancien interne des hôpitaux, ancien chef de laboratoire à la Faculté de médecine, lauréat de l'Institut.

## TABLE DES MATIÈRES

CHAPITRE PREMIER. **Historique.**

CHAP. II. **Morphologie, structure, histologie et composition chimique de la matière vivante.**

CHAP. III. **Conditions de l'irritabilité.** — I. Milieu chimique nécessaire au fonctionnement du protoplasma; *A.* Rôle de l'eau; *B.* Rôle de l'oxygène; *C.* Rôle des aliments. — II. Rôle de l'énergie; *A.* Influence de la chaleur; *B.* Influence des autres transformations de l'énergie.

CHAP. IV. **L'irritabilité et ses manifestations.** — *A.* Irritabilité nutritive.

CHAP. V. **L'irritabilité et ses manifestations** (*suite*). — *B.* Irritabilité fonctionnelle. 1. Phénomènes caloriques. 2. Phénomènes de mouvement. 3. Phénomènes électriques. 4. Phénomènes lumineux.

CHAP. VI. **L'irritabilité et ses manifestations** (*suite*). — Phénomènes nerveux. I. Rôle du noyau dans la cellule. — II. Action du système nerveux dans l'organisme. *A.* A quelle période de l'évolution animale apparaît le système nerveux? *B.* Comment le système nerveux agit-il sur l'irritabilité? 1. Y a-t-il continuité du système nerveux avec l'organe ou simple

contiguïté? 2. Quel est le lien qui relie l'influx nerveux à la vie cellulaire? 3. De quelle manière le système nerveux agit-il sur la fonction et quelles sont les lois qui règlent les manifestations des diverses irritabilités qui lui sont soumises? 4. Quel est le rôle du système nerveux?

CHAP. VII. **Nature de l'irritabilité.**

---

N<sup>o</sup> 8. — **La Spéléologie** ou science des cavernes, par E.-A. MARTEL.

**TABLE DES MATIÈRES**

CHAPITRE PREMIER. **Définition. Historique. Bibliographie. Programme.**

CHAP. II. **Origine des cavernes.** — Influence prépondérante des fissures préexistantes du sol. Joints et diaclases. Leur utilisation par l'eau.

CHAP. III. **Mode d'action des eaux souterraines.** — Érosion. Corrosion. Pression hydrostatique.

CHAP. IV. **Circulation des eaux dans l'intérieur des terrains fissurés.** — Absorption par les crevasses, pertes et abîmes. Confusion de la nomenclature. Emmagasinement dans les réservoirs des cavernes et les rivières souterraines. Leur extension en hauteur et longueur. Absence des nappes d'eau. Issue des eaux par les sources.

CHAP. V. **Les abîmes. Leur origine.** — Puits d'érosion. Orgues géologiques. Théorie geysérienne. Effondrements. Jalonnement. Dolines. Vallées inachevées. Désobstruction des fonds d'abîmes.

CHAP. VI. **Les rivières souterraines. Leur pénétration.** — Aspects divers selon les fissures. Appauvrissement des eaux actuelles. Dessèchement de l'écorce terrestre. Obstacles des rivières souterraines. Siphons. Pression hydrostatique. Tunnels naturels.

CHAP. VII. **L'issue des rivières souterraines. Les sources. Les résurgences.** — Les sources siphonantes. Sources pérennes, intermittentes, temporaires. Les trop-pleins. Variations et crues des rivières souterraines. L'évaporation souterraine. Explosions de sources. Age du creusement des cavernes. Sable croulant. Éruptions de tourbières.

CHAP. VIII. **Contamination des rivières souterraines.** — L'empoisonnement des résurgences par les abîmes. La source? de Sauve. Expériences à la fluorescéine.

- CHAP. IX. **La spéléologie glaciaire.** — Écoulements de l'eau sous les glaciers. Poches et débâcles intra-glaciaires. Exploration des moulins et crevasses. Grottes naturelles sous la glace.
- CHAP. X. **Météorologie souterraine.** — Pression atmosphérique. Irrégularité des températures des cavernes et des résurgences. Application à l'hygiène publique. Acide carbonique des cavernes. Gaz de décomposition organique.
- CHAP. XI. **Glacières naturelles.** — Influence prépondérante du froid de l'hiver sur leur formation. Trous à vent. Puits à neige.
- CHAP. XII. **Relations des cavités naturelles avec les filons métallifères.** — Substances minérales rencontrées dans les cavernes. Blue-John-Mine. Pseudomorphoses. Les phosphates.
- CHAP. XIII. **Les concrétions. Stalactites et stalagmites.** — Calcite, aragonite, ktypéite. Mondmche. Perles des cavernes. Stalagmites d'argile. Eaux perçantes. Influence des eaux courantes, temporaires, stagnantes. Les gours. Les tufs : leur formation et leurs dangers. Le remplissage des cavernes.
- CHAP. XIV. **Travaux pratiques.** — Désobstruction de pertes. Dessèchement de marais. Recherches de réservoirs naturels. Désobstruction d'abîmes. Reboisement. Indications pour les travaux publics. Expériences scientifiques diverses. Recherches paléontologiques.
- CHAP. XV. **Préhistoire. Archéologie. Ethnographie.**
- CHAP. XVI. **Faune et Flore souterraines.** — Les animaux aveugles. Leur origine. Leur existence. Modification de leurs organes. Les chauves-souris. La flore des abîmes. Conclusions.
- 

N<sup>o</sup> 9. — **L'Orientation**, par le D<sup>r</sup> PIERRE BONNIER.

## TABLE DES MATIÈRES

- CHAPITRE PREMIER. **Définition.**
- CHAP. II. **La notion d'espace.**
- CHAP. III. **Orientation subjective.** — Sens des attitudes segmentaires.
- CHAP. IV. **Orientation subjective.** — Sens de l'attitude totale.
- CHAP. V. **Rapports de l'orientation subjective avec la motricité.**

CHAP. VI. **Rapports de l'orientation subjective avec la sensibilité.** — *Orientation objective.* Orientation tactile. Orientation visuelle. Orientation auditive. Orientation olfactive. Notions stéréognostiques.

CHAP. VII. **Orientation lointaine.**

CHAP. VIII. **Domaine psychique de l'orientation.**

---

# N<sup>o</sup> 10. — **L'Assimilation chlorophyllienne et la structure des plantes,** par ED. GRIFFON, ingénieur-agronome, docteur ès sciences.

## TABLE DES MATIÈRES

INTRODUCTION.

CHAPITRE PREMIER. **L'énergie assimilatrice et sa nature.** — Nature de l'assimilation chlorophyllienne. — Définition de l'énergie assimilatrice. — Séparation de l'assimilation et de la respiration. — Comparaison entre les deux phénomènes. — Résultante : influence des conditions de milieu sur elle. — Cas où la respiration l'emporte. — Mesure de la résistante : méthode de la formation de l'amidon ; méthode des échanges gazeux et procédés expérimentaux.

CHAP. II. **Plantes représentant leur structure normale.** — I. *Plantes ni parasites ni saprophytes.* — 1. Plantes appartenant à des variétés ou à des espèces voisines, mais dont les feuilles sont inégalement vertes. 2. Ombellifères. — 3. Plantes grasses. — 4. Plantes rouges. — 5. Plantes panachées. — 6. Plantes d'âges différents. — 7. Organes différents. — II. *Plantes parasites et saprophytes.* — Rhinanthacées et Loranthacées. Orchidées. Appendice sur l'assimilation chez les Algues : Algues brunes, rouges et bleues ; Bactéries pourprées ; Bactéries de la nitrification.

CHAP. III. **Plantes dont la structure a été modifiée par le milieu.** — I. *Action de la lumière.* — 1. Plantes ayant verdi à l'obscurité. — 2. Plantes développées à l'ombre et au soleil. — 3. Plantes développées à la lumière continue et à la lumière discontinue ; plantes arctiques. — Plantes ayant crû dans des lumières inégalement réfrangibles. — II. *Action de la chaleur.* — 1. Plantes de plaine et de montagne. — 2. Plantes développées à des températures différentes. — 3. Plantes rendues artificiellement alpines par alternance des températures extrêmes. — III. *Action de l'état*

*hygrométrie*. — 1. Plantes développées dans un milieu sec et dans un milieu humide; plantes arctiques et plantes alpines. — IV. *Action des sels minéraux*. — 1. Nitrates. — 2. Sels de fer. — 3. Sels de cuivre. — 4. Sel marin; plantes du littoral. — 5. Calcaire; plantes chlorotiques.

CHAP. IV. **Structure et assimilation**. — Observations générales sur les expériences précédentes. — Hypothèses diverses sur la signification des tissus palissadiques. — Développement des feuilles dans une atmosphère riche en acide carbonique. — L'assimilation sur les deux faces d'une feuille; interprétation des résultats. — L'assimilation dans la lumière solaire qui a traversé des tissus de végétaux. — Influence de la structure de l'épiderme; épaisseur de la cuticule; nombre des stomates; poils. — Quantité de chlorophylle. — Pluralité des chlorophylles. Spécificité du substratum vivant des chloroleucites. — Anatomie physiologique et physiologie expérimentale.

CONCLUSIONS.

---

N<sup>o</sup> 11. — **L'Évolution du Pigment**, par le  
D<sup>r</sup> G. BOHN, agrégé des Sciences naturelles, préparateur à la  
Sorbonne.

## TABLE DES MATIÈRES

INTRODUCTION. — I. La vie des ancêtres de la cellule. — II. La vie des bactéries, des chloroleucites et des granules pigmentaires. — III. La vie des cellules ou plastides. — IV. Évolution de la vie plastidulaire à la vie plastidaire. — V. La vie des êtres plastidaires. — Métamorphoses et production du pigment.

CHAPITRE PREMIER. — **De la constitution des pigments en tant que substances chimiques produites par les granules pigmentaires**. — I. Pigments hydrocarbonés (lipochromes) et leurs dérivés. — II. Pigments azotés dérivés de la chromatine. — Pigments uriques des lépidoptères et des poissons. Hémoglobine et ses dérivés. Chlorophylle et ses dérivés. Mélanines. — III. Pigments azotés de la série aromatique.

CHAP. II. — **Des granules pigmentaires en tant que producteurs des pigments**. — I. Formes des granules pigmentaires. — II. Dimensions. — III. Teinte. — IV. Nature des granules et leur composition chimique

d'après Carnot. — V. Mouvements des granules pigmentaires. — VI. Réactions dues à des agents chimiques. — VII. Réactions dues à des agents physiques.

CHAP. III. — **Étude biologique des bactéries chromogènes.** — Intérêt de l'étude des bactéries pour celle des granules pigmentaires. — Aperçu sur les bactéries chromogènes. — Influence de la chaleur sur les bactéries chromogènes. — Influence de la lumière. — Expériences sur les Beggiatoa et les bactéries pourprées. — Expériences sur le bacille de Kiel. — Expériences sur le bacille du pus bleu. — Influence des substances chimiques sur les bactéries chromogènes. — Action de l'oxygène. Action des alcalis. Action des acides. Action des sels. Action de l'alcool, de la glycérine, des sucres. — Conclusions.

CHAP. IV. **Étude biologique des chloroleucites.**

CHAP. V. **Étude biologique des granules pigmentaires des animaux.** — Haut intérêt de cette étude et manière de la comprendre.

CHAP. VI. **Apparition des granules pigmentaires dans les organismes animaux.** — I. Apparition du pigment dans les cellules reproductrices. II. Apparition du pigment dans les tissus d'un animal en voie de métamorphose. — III. Apparition du pigment dans les cellules nerveuses sénescents. — Conséquences. — Résumé.

CHAP. VII. **Migrations, infections et contagions pigmentaires.** — I. Extension progressive du pigment. — II. Transport du pigment dans les organismes. — III. Facteurs qui influent sur les migrations pigmentaires. — IV. Infections et contagions pigmentaires.

CHAP. VIII. **Modifications du pigment dans les organismes. Virages, atténuations et exaltations pigmentaires.** — Influence des agents chimiques. — Influence de l'oxygène et des réducteurs. Influence des acides. Influence des bases organiques. — Influence des agents physiques.

CHAP. IX. **Évolution du pigment dans les divers groupes du règne animal.** — I. Êtres monoplastidaires et gastréades. — Protozoaires. Spongiaires. Cœlentérés. — II. Néphridiés. — Vers. Vertébrés. Tuniciers. — III. Arthropodes. — Crustacés. Insectes. — Conclusions.

CHAP. X. **Harmonies pigmentaires.** — Animaux des grandes profondeurs et animaux de la haute mer. — Animaux marins fouisseurs et animaux terrestres cavernicoles. — Animaux des îles et animaux des déserts. — Faune et flore des zones de la mer. — Mimétisme et sélection naturelle. — Défense des organismes par la production du pigment. — Défense de l'acide carbonique. Défense contre les poisons. Défense contre

l'oxygène. Défense contre la lumière. — Théorie nouvelle de l'adaptation chromatique. Lutte vitale entre les granules pigmentaires.

CONCLUSIONS.

---

N<sup>o</sup> 12. — **L'Hérédité acquise**, ses conséquences horticoles, agricoles et médicales, par M.-J. COSTANTIN.

**TABLE DES MATIÈRES**

PRÉFACE.

CHAPITRE PREMIER. **État actuel de la question.**

CHAP. II. **Théorie du plasma germinatif.**

CHAP. III. **Hérédité dans la reproduction asexuée** (Variétés horticoles et agricoles. Hybrides de greffe).

CHAP. IV. **Transformisme expérimental et agronomie.**

CHAP. V. **Origine et progrès de la sélection artificielle** (l'art de l'élevage).

CHAP. VI. **Quelques objections à l'action du milieu.** — I. Les espèces jordaniennes habitent les mêmes lieux. — II. Les variations ne se produisent pas à la première génération. — III. Les effets attribués aux agents extérieurs sont le résultat d'une lente sélection. — IV. Induction physiologique. — V. Conclusions.

CHAP. VII. — **Maladies.** — I. Hérédité morbide. — II. Hérédité vaccinale.

CHAP. VIII. — **Sélection germicale.**

---

N<sup>o</sup> 13. — **Les Phénomènes électriques chez les êtres vivants**, par MAURICE MENDELSSOHN.

**TABLE DES MATIÈRES**

INTRODUCTION.

CHAP. I. **Historique.** — Expériences de Galvani. Critique de Volta. Recherches de Matteucci et de du Bois-Reymond.

CHAP. II. **Phénomènes électriques des muscles et des nerfs.** — Courant des muscles et des nerfs au repos. Loi du courant musculaire et nerveux. Courants des muscles et des nerfs en action. Variation négative du courant de repos. Courants d'action. Courants électrotoniques et secondaires des muscles et des nerfs.

CHAP. III. **Phénomènes électriques chez l'homme.** — Variation négative qui accompagne la contraction volontaire d'un muscle intact. Courants d'action diphasiques. Courants du muscle cardiaque recueillis à travers la peau. Tension électrique de la surface du corps humain.

CHAP. IV. **Phénomènes électriques de la peau et des glandes.** — Courants cutanés et glandulaires.

CHAP. V. **Phénomènes électriques des centres nerveux et des organes des sens.** — Courants cérébro-spinaux. Courants rétinien.

CHAP. VI. **Poissons électriques.** — Structure de l'organe électrique. Nature et caractères de la décharge électrique des poissons. Immunité du poisson électrique vis-à-vis de sa propre décharge. La décharge envisagée comme un tétanos électrique. Courant de repos dit courant de l'organe.

CHAP. VII. **Phénomènes électriques chez les végétaux.** — Courant normal de la feuille et courants d'action de la *Dionea muscipula*. Courants trophiques, traumatiques et courants d'excitation des plantes.

CHAP. VIII. **Théorie d'électrogenèse chez les êtres vivants.** — Théorie moléculaire de du Bois-Reymond. Théorie d'altération d'Hermann. Théorie électro-capillaire de d'Arsonval. Théorie électrolytique.

CHAP. IX. **Considérations générales. Rôle des phénomènes électriques dans les manifestations de la vie.** — Électricité organique et la propagation de l'excitation le long de la fibre nerveuse. Transmission de l'excitation du nerf au muscle. Hypothèse de la décharge.

---

N<sup>o</sup> 14. — **Mode de fonctionnement économique de l'organisme**, par le docteur A. IMBERT, professeur à la Faculté de médecine de l'Université de Montpellier, membre correspondant de l'Académie de médecine.

## TABLE DES MATIÈRES

**Considérations générales.** — Causes diverses qui influent sur la dépense d'énergie du moteur animé et qui dépendent de la volonté. Raccourcissement musculaire. Antagonisme des muscles. Positions relatives des leviers osseux. Forme des muscles et mode d'excitation.

**Actes mécaniques généraux.** — Procédé d'appréciation propre à l'organisme. Conditions d'observation. L'adulte et l'enfant; le sujet en état de santé et le malade. Les pêcheuses d'Haughton. Les travaux de Marey sur la locomotion. L'apprentissage des sports.

**Les muscles antagonistes.** — Opinions de Winslow, de Duchenne (de Boulogne), de Pettigrew. Travaux de Beaunis, de Demeny, de P. Richer. Indications fournies par la considération des muscles droits internes et externes du globe oculaire. Recherches de Sherrington et de Topolanski. Faits cliniques correspondants. Loi générale du fonctionnement des muscles antagonistes.

**Adaptation des muscles à un fonctionnement économique.** — Travaux de Haughton. Insuffisance des considérations tirées de la mécanique des corps inertes. Recherches de J. Guérin, de W. Roux, de Marey sur l'adaptation fonctionnelle des muscles. Travaux de Weiss. Caractères physiologiques de la question. Topographie de l'innervation musculaire; inégalité de l'excitation des diverses fibres d'un même muscle.

**L'énergétique animale d'après l'œuvre de Chauveau.** — L'énergie physiologique et ses variations avec le raccourcissement et avec la charge. Les travaux connexes. Le travail d'excitation neuromusculaire. La multiplicité des causes de dépense d'énergie par le moteur animé. Étude de quelques actes mécaniques en tenant compte de ces diverses dépenses. La contraction balistique de P. Richer; les mouvements du globe oculaire. Soutien d'un poids suspendu à la main et soutien du poids du corps à la barre du trapèze.

CONCLUSIONS.

---

N<sup>OS</sup> 15–16. — **Le Leucocyte et ses granulations**, par le D<sup>F</sup> C. LEVADITI, chef du Laboratoire de bactériologie et d'anatomie pathologique de l'hôpital Brancovano (Bucharest), lauréat de l'Institut (Académie des Sciences). Avec une préface par

le professeur PAUL EHRLICH, directeur de l'Institut de thérapeutique expérimentale de Francfort-sur-le-Mein.

## TABLE DES MATIÈRES

PRÉFACE.

CHAPITRE PREMIER. **Généralités.**

CHAP. II. **Méthode analytique.** — *a)* Valeur de la méthode analytique. — *b)* Oxyphilie, basophilie, neutrophilie.

CHAP. III. **La morphologie et les réactions colorantes des granulations leucocytaires.** — I. Granulations éosinophiles ( $\alpha$ ). — II. Granulations neutrophiles ( $\varepsilon$ ). — III. Granulations basophiles métachromatiques ( $\gamma$ ).

CHAP. IV. **Les espèces leucocytaires du sang et des organes hématopoïétiques. Globules blancs jeunes (myélocytes) et adultes. Relations entre les diverses catégories de leucocytes.** — I. Les diverses espèces de globules blancs. — II. Leucocyte granulé jeune (myélocyte); leucocyte granulé adulte (à noyau polymorphe). — III. Relations entre les diverses catégories de leucocytes.

CHAP. V. **Cytogenèse des globules blancs granulés.** — I. *La moelle osseuse.* — *a)* Considérations d'ordre histologique. — *b)* Considérations d'ordre physiologique. — *c)* Considérations d'ordre anatomo-clinique. — II. *La rate comme générateur de globules blancs granulés.* — *a)* Considérations d'ordre histologique. — *b)* Considérations d'ordre physiologique.

CHAP. VI. **Variations numériques des leucocytes granulés du sang. Leucocytose.** — I. La leucocytose. — 1. La théorie de Virchow. — 2. La théorie de Schur et Lowy. — 3. La théorie de Schultz. — 4. La théorie de Buchner et Roemer. — 5. La théorie chimiotaxique. — II. Taux leucocytaire du sang normal.

CHAP. VII. **Éosinophilie hématique.** — 1. Éosinophilie taxique. — 2. Éosinophilie réactionnelle. — 3. Éosinophilie dans l'asthme. — 4. Éosinophilie dans les maladies cutanées. — 5. Éosinophilie dans les affections parasitaires.

CHAP. VIII. **Éosinophilie locale.** — 1. Éosinophiles dans les crachats. — 2. Éosinophiles dans les affections cutanées. — Théorie de la formation locale des cellules éosinophiles.

CHAP. IX. Considérations générales sur les autres cellules granulées (neutrophiles, Mastzellen). La Mastzellen-leucocytose. — La Mastzellen-leucocytose.

CHAP. X. Importance des granulations leucocytaires. Leur caractère spécifique.

---

## N<sup>o</sup> 17. — Les Phénomènes des Métamorphoses internes, par J. ANGLAS, docteur ès sciences.

### TABLE DES MATIÈRES

INTRODUCTION.

I. Transformation et métamorphose. — II. L'histolyse et l'histogenèse. — III. État actuel de la question. — IV. Mécanisme et déterminisme de la métamorphose.

CHAPITRE PREMIER. Histogenèse précédée d'une histolyse peu considérable. — I. *Téguments*. Histoblastes, replis et disques imaginaires. Histogenèse des appendices et de l'hypoderme. Modification de l'hypoderme larvaire. Éléments dérivés de l'hypoderme. Rôle des leucocytes. — II. *Système trachéen*. Cas ne comportant pas d'histolyse. — III. *Œsophage et intestin postérieur*. — IV. *Tube excréteur ou de Malpighi*. — V. *Système nerveux*. — VI. *Organes génitaux*. La conservation de l'individu et celle de l'espèce. Modification de l'ovaire de *Culex pipiens*. Histolyse des cellules nourricières. Rôle des leucocytes. La métamorphose et l'évolution génitale.

CHAP. II. Les processus de l'histolyse. — I. *Généralités sur les tissus conjonctifs*. Conjonctif de la larve. Conjonctif de la nymphe. Sarcocytes; Körnchenkugel. Conjonctif de l'adulte. — II. *Évolution de la cellule adipeuse d'un Diptère*. Larve jeune; réserves adipeuses. Larve mûre; granules albuminoïdes. Nymphe. Origine des réserves albuminoïdes. Adulte. — III. *Évolution du tissu adipeux chez les Insectes en général*. — IV. *Quelques théories de l'histolyse du corps adipeux*. — V. *Cellules excrétrices et œnocytes*. — VI. *Leucocytes*. — VII. *Le tissu musculaire en général*. Muscles larvaires. Marche de l'histolyse dans les muscles. — VIII. *Histolyse totale de muscles*. Dégénérescence du noyau. Sarcocytes. Caryolytes. Sarcolytes. Histolyse des fibres. Rôle des leucocytes. — IX. *Histolyse partielle de muscles*. Destruction de fibres. Transformation de

fibres larvaires. — X. *Histolyse des muscles avec remaniement considérable.* — XI. *Histolyse musculaire chez les Diptères.* — XII. *Historique critique du problème de la myolyse.* Théories absolues : A) *Théorie phagocytaire.* Théories absolues : B) *Régression chimique.* — Théories mixtes : A) *Autophagocytose.* Théories mixtes : B) *Lyocytose.* — XIII. *Histolyse des tubes de Malpighi et des glandes séricigènes.* Rôle des leucocytes. — XIV. *Histolyse de l'intestin moyen.* Épithélium larvaire. Cellules de remplacement; flots de remplacement. Leur origine. Histolyse de l'épithélium larvaire.

CHAP. III. **Les caractères de l'histolyse.** — I. La dégénérescence initiale. — II. Y a-t-il autophagocytose? — III. Éliminations nucléaires et protoplasmiques. — IV. Agglomérations leucocytaires. — V. Englobement et transport de débris tissulaires par les leucocytes. — VI. La phagocytose.

CHAP. IV. **Les processus de l'histogénèse.** — I. *Tissu adipeux imaginal.* Évolution des noyaux musculaires larvaires. — II. *Tissu musculaire imaginal.* Origine des noyaux imaginaires. Muscles longitudinaux de l'abdomen. Muscles du thorax. Muscles péri-intestinaux. — III. *Histogénèse de l'intestin moyen.* — IV. *Origine des éléments imaginaires en général.* Muscles. Conjonctif. Intestin.

CHAP. V. **Le déterminisme de la métamorphose.** — I. *La théorie phagocytaire.* Les métamorphoses et les processus inflammatoires. — II. *Théorie de la crise génitale.* Objections. — III. *Théorie asphyxique.* Accumulation de CO<sub>2</sub> dans le milieu intérieur. Aucuns troubles de la nutrition (transpiration, glycogénie, troubles circulatoires). Relation entre l'asphyxie et la métamorphose. Phénomènes de pigmentation. — IV. *Théorie de l'arrêt physiologique.* Nécrobiose phylogénique et nécrobiose pathologique. Application à la loi de Geoffroy Saint-Hilaire. — V. *Éthologie des métamorphoses.* Passage de la vie pélagique libre à la vie sédentaire. Passage de la vie libre à la vie parasite. Passage de la vie aquatique à la vie aérienne. Changement de régime alimentaire; cas des Insectes. Hypermétamorphoses. — VI. *Les métamorphoses et la loi de Fr. Müller.* — VII. *Préformation et épigénèse.* — VIII. *Y a-t-il substitution d'organismes?* — IX. *Génération alternantes et métamorphoses.* Étendue et limites du terme métamorphose.

CONCLUSIONS.

---

N<sup>o</sup> 18. — **Purine et ses dérivés**, par le  
D<sup>r</sup> A. MOUNEYRAT, docteur ès sciences, ancien préparateur en chef  
au laboratoire de chimie biologique de la Faculté de médecine de Paris.

## TABLE DES MATIÈRES

### INTRODUCTION.

**Historique des bases xanthiques.** — Méthodes de synthèse de l'acide urique. — Constitution et nomenclature de la purine et de ses dérivés. — Méthodes de synthèse dans la série purique. — Acide urique et ses dérivés monométhylés. — Acides diméthyluriques. — Acides triméthyluriques. — 2-6-dioxypurine. — Xanthine et ses dérivés méthylés. — Théobromine. — Théophylline. — Caféine. — 6-8-dioxypurine et ses dérivés méthylés. — Monoxypurine-Hypoxanthine et ses dérivés méthylés. — Monoaminopurine-Adénine. — Autres dérivés méthylés. — Aminooxyapurines-Guanidine et dérivés méthylés. — Aminodioxyapurine et ses dérivés méthylés. — Thiopurine et ses dérivés. — Oxychloropurines. — Purine. — Influence de la structure des dérivés puriques sur leurs propriétés physiques et chimiques. — Origine et lieu de formation des bases puriques dans l'organisme animal. — Variations physiologiques et pathologiques des bases puriques. — Dosage des bases puriques. — Conclusions et mécanisme de formation des bases puriques dans l'organisme animal.

---

End of the Project Gutenberg EBook of Sur les Principes Fondamentaux de la Théorie des Nombres et de la Géométrie, by Hermann Laurent

\*\*\* END OF THIS PROJECT GUTENBERG EBOOK LA THÉORIE DES NOMBRES \*\*\*

\*\*\*\*\* This file should be named 33132-pdf.pdf or 33132-pdf.zip \*\*\*\*\*  
This and all associated files of various formats will be found in:  
<http://www.gutenberg.org/3/3/1/3/33132/>

Produced by Andrew D. Hwang, Laura Wisewell, Chuck Greif  
and the Online Distributed Proofreading Team at  
<http://www.pgdp.net> (The original copy of this book was  
generously made available for scanning by the Department  
of Mathematics at the University of Glasgow.)

Updated editions will replace the previous one--the old editions  
will be renamed.

Creating the works from public domain print editions means that no  
one owns a United States copyright in these works, so the Foundation  
(and you!) can copy and distribute it in the United States without  
permission and without paying copyright royalties. Special rules,  
set forth in the General Terms of Use part of this license, apply to  
copying and distributing Project Gutenberg-tm electronic works to  
protect the PROJECT GUTENBERG-tm concept and trademark. Project  
Gutenberg is a registered trademark, and may not be used if you  
charge for the eBooks, unless you receive specific permission. If you  
do not charge anything for copies of this eBook, complying with the  
rules is very easy. You may use this eBook for nearly any purpose  
such as creation of derivative works, reports, performances and  
research. They may be modified and printed and given away--you may do  
practically ANYTHING with public domain eBooks. Redistribution is  
subject to the trademark license, especially commercial  
redistribution.

\*\*\* START: FULL LICENSE \*\*\*

THE FULL PROJECT GUTENBERG LICENSE  
PLEASE READ THIS BEFORE YOU DISTRIBUTE OR USE THIS WORK

To protect the Project Gutenberg-tm mission of promoting the free  
distribution of electronic works, by using or distributing this work

(or any other work associated in any way with the phrase "Project Gutenberg"), you agree to comply with all the terms of the Full Project Gutenberg-tm License (available with this file or online at <http://gutenberg.org/license>).

## Section 1. General Terms of Use and Redistributing Project Gutenberg-tm electronic works

1.A. By reading or using any part of this Project Gutenberg-tm electronic work, you indicate that you have read, understand, agree to and accept all the terms of this license and intellectual property (trademark/copyright) agreement. If you do not agree to abide by all the terms of this agreement, you must cease using and return or destroy all copies of Project Gutenberg-tm electronic works in your possession. If you paid a fee for obtaining a copy of or access to a Project Gutenberg-tm electronic work and you do not agree to be bound by the terms of this agreement, you may obtain a refund from the person or entity to whom you paid the fee as set forth in paragraph 1.E.8.

1.B. "Project Gutenberg" is a registered trademark. It may only be used on or associated in any way with an electronic work by people who agree to be bound by the terms of this agreement. There are a few things that you can do with most Project Gutenberg-tm electronic works even without complying with the full terms of this agreement. See paragraph 1.C below. There are a lot of things you can do with Project Gutenberg-tm electronic works if you follow the terms of this agreement and help preserve free future access to Project Gutenberg-tm electronic works. See paragraph 1.E below.

1.C. The Project Gutenberg Literary Archive Foundation ("the Foundation" or PGLAF), owns a compilation copyright in the collection of Project Gutenberg-tm electronic works. Nearly all the individual works in the collection are in the public domain in the United States. If an individual work is in the public domain in the United States and you are located in the United States, we do not claim a right to prevent you from copying, distributing, performing, displaying or creating derivative works based on the work as long as all references to Project Gutenberg are removed. Of course, we hope that you will support the Project Gutenberg-tm mission of promoting free access to electronic works by freely sharing Project Gutenberg-tm works in compliance with the terms of this agreement for keeping the Project Gutenberg-tm name associated with the work. You can easily comply with the terms of this agreement by keeping this work in the same format with its attached full Project Gutenberg-tm License when you share it without charge with others.

1.D. The copyright laws of the place where you are located also govern what you can do with this work. Copyright laws in most countries are in a constant state of change. If you are outside the United States, check the laws of your country in addition to the terms of this agreement before downloading, copying, displaying, performing, distributing or creating derivative works based on this work or any other Project Gutenberg-tm work. The Foundation makes no representations concerning the copyright status of any work in any country outside the United States.

1.E. Unless you have removed all references to Project Gutenberg:

1.E.1. The following sentence, with active links to, or other immediate access to, the full Project Gutenberg-tm License must appear prominently whenever any copy of a Project Gutenberg-tm work (any work on which the phrase "Project Gutenberg" appears, or with which the phrase "Project Gutenberg" is associated) is accessed, displayed, performed, viewed, copied or distributed:

This eBook is for the use of anyone anywhere at no cost and with almost no restrictions whatsoever. You may copy it, give it away or re-use it under the terms of the Project Gutenberg License included with this eBook or online at [www.gutenberg.org](http://www.gutenberg.org)

1.E.2. If an individual Project Gutenberg-tm electronic work is derived from the public domain (does not contain a notice indicating that it is posted with permission of the copyright holder), the work can be copied and distributed to anyone in the United States without paying any fees or charges. If you are redistributing or providing access to a work with the phrase "Project Gutenberg" associated with or appearing on the work, you must comply either with the requirements of paragraphs 1.E.1 through 1.E.7 or obtain permission for the use of the work and the Project Gutenberg-tm trademark as set forth in paragraphs 1.E.8 or 1.E.9.

1.E.3. If an individual Project Gutenberg-tm electronic work is posted with the permission of the copyright holder, your use and distribution must comply with both paragraphs 1.E.1 through 1.E.7 and any additional terms imposed by the copyright holder. Additional terms will be linked to the Project Gutenberg-tm License for all works posted with the permission of the copyright holder found at the beginning of this work.

1.E.4. Do not unlink or detach or remove the full Project Gutenberg-tm License terms from this work, or any files containing a part of this

work or any other work associated with Project Gutenberg-tm.

1.E.5. Do not copy, display, perform, distribute or redistribute this electronic work, or any part of this electronic work, without prominently displaying the sentence set forth in paragraph 1.E.1 with active links or immediate access to the full terms of the Project Gutenberg-tm License.

1.E.6. You may convert to and distribute this work in any binary, compressed, marked up, nonproprietary or proprietary form, including any word processing or hypertext form. However, if you provide access to or distribute copies of a Project Gutenberg-tm work in a format other than "Plain Vanilla ASCII" or other format used in the official version posted on the official Project Gutenberg-tm web site ([www.gutenberg.org](http://www.gutenberg.org)), you must, at no additional cost, fee or expense to the user, provide a copy, a means of exporting a copy, or a means of obtaining a copy upon request, of the work in its original "Plain Vanilla ASCII" or other form. Any alternate format must include the full Project Gutenberg-tm License as specified in paragraph 1.E.1.

1.E.7. Do not charge a fee for access to, viewing, displaying, performing, copying or distributing any Project Gutenberg-tm works unless you comply with paragraph 1.E.8 or 1.E.9.

1.E.8. You may charge a reasonable fee for copies of or providing access to or distributing Project Gutenberg-tm electronic works provided that

- You pay a royalty fee of 20% of the gross profits you derive from the use of Project Gutenberg-tm works calculated using the method you already use to calculate your applicable taxes. The fee is owed to the owner of the Project Gutenberg-tm trademark, but he has agreed to donate royalties under this paragraph to the Project Gutenberg Literary Archive Foundation. Royalty payments must be paid within 60 days following each date on which you prepare (or are legally required to prepare) your periodic tax returns. Royalty payments should be clearly marked as such and sent to the Project Gutenberg Literary Archive Foundation at the address specified in Section 4, "Information about donations to the Project Gutenberg Literary Archive Foundation."
- You provide a full refund of any money paid by a user who notifies you in writing (or by e-mail) within 30 days of receipt that s/he does not agree to the terms of the full Project Gutenberg-tm License. You must require such a user to return or

destroy all copies of the works possessed in a physical medium and discontinue all use of and all access to other copies of Project Gutenberg-tm works.

- You provide, in accordance with paragraph 1.F.3, a full refund of any money paid for a work or a replacement copy, if a defect in the electronic work is discovered and reported to you within 90 days of receipt of the work.
- You comply with all other terms of this agreement for free distribution of Project Gutenberg-tm works.

1.E.9. If you wish to charge a fee or distribute a Project Gutenberg-tm electronic work or group of works on different terms than are set forth in this agreement, you must obtain permission in writing from both the Project Gutenberg Literary Archive Foundation and Michael Hart, the owner of the Project Gutenberg-tm trademark. Contact the Foundation as set forth in Section 3 below.

#### 1.F.

1.F.1. Project Gutenberg volunteers and employees expend considerable effort to identify, do copyright research on, transcribe and proofread public domain works in creating the Project Gutenberg-tm collection. Despite these efforts, Project Gutenberg-tm electronic works, and the medium on which they may be stored, may contain "Defects," such as, but not limited to, incomplete, inaccurate or corrupt data, transcription errors, a copyright or other intellectual property infringement, a defective or damaged disk or other medium, a computer virus, or computer codes that damage or cannot be read by your equipment.

1.F.2. LIMITED WARRANTY, DISCLAIMER OF DAMAGES - Except for the "Right of Replacement or Refund" described in paragraph 1.F.3, the Project Gutenberg Literary Archive Foundation, the owner of the Project Gutenberg-tm trademark, and any other party distributing a Project Gutenberg-tm electronic work under this agreement, disclaim all liability to you for damages, costs and expenses, including legal fees. YOU AGREE THAT YOU HAVE NO REMEDIES FOR NEGLIGENCE, STRICT LIABILITY, BREACH OF WARRANTY OR BREACH OF CONTRACT EXCEPT THOSE PROVIDED IN PARAGRAPH F3. YOU AGREE THAT THE FOUNDATION, THE TRADEMARK OWNER, AND ANY DISTRIBUTOR UNDER THIS AGREEMENT WILL NOT BE LIABLE TO YOU FOR ACTUAL, DIRECT, INDIRECT, CONSEQUENTIAL, PUNITIVE OR INCIDENTAL DAMAGES EVEN IF YOU GIVE NOTICE OF THE POSSIBILITY OF SUCH DAMAGE.

1.F.3. LIMITED RIGHT OF REPLACEMENT OR REFUND - If you discover a defect in this electronic work within 90 days of receiving it, you can receive a refund of the money (if any) you paid for it by sending a written explanation to the person you received the work from. If you received the work on a physical medium, you must return the medium with your written explanation. The person or entity that provided you with the defective work may elect to provide a replacement copy in lieu of a refund. If you received the work electronically, the person or entity providing it to you may choose to give you a second opportunity to receive the work electronically in lieu of a refund. If the second copy is also defective, you may demand a refund in writing without further opportunities to fix the problem.

1.F.4. Except for the limited right of replacement or refund set forth in paragraph 1.F.3, this work is provided to you 'AS-IS' WITH NO OTHER WARRANTIES OF ANY KIND, EXPRESS OR IMPLIED, INCLUDING BUT NOT LIMITED TO WARRANTIES OF MERCHANTABILITY OR FITNESS FOR ANY PURPOSE.

1.F.5. Some states do not allow disclaimers of certain implied warranties or the exclusion or limitation of certain types of damages. If any disclaimer or limitation set forth in this agreement violates the law of the state applicable to this agreement, the agreement shall be interpreted to make the maximum disclaimer or limitation permitted by the applicable state law. The invalidity or unenforceability of any provision of this agreement shall not void the remaining provisions.

1.F.6. INDEMNITY - You agree to indemnify and hold the Foundation, the trademark owner, any agent or employee of the Foundation, anyone providing copies of Project Gutenberg-tm electronic works in accordance with this agreement, and any volunteers associated with the production, promotion and distribution of Project Gutenberg-tm electronic works, harmless from all liability, costs and expenses, including legal fees, that arise directly or indirectly from any of the following which you do or cause to occur: (a) distribution of this or any Project Gutenberg-tm work, (b) alteration, modification, or additions or deletions to any Project Gutenberg-tm work, and (c) any Defect you cause.

## Section 2. Information about the Mission of Project Gutenberg-tm

Project Gutenberg-tm is synonymous with the free distribution of electronic works in formats readable by the widest variety of computers including obsolete, old, middle-aged and new computers. It exists because of the efforts of hundreds of volunteers and donations from

people in all walks of life.

Volunteers and financial support to provide volunteers with the assistance they need, are critical to reaching Project Gutenberg-tm's goals and ensuring that the Project Gutenberg-tm collection will remain freely available for generations to come. In 2001, the Project Gutenberg Literary Archive Foundation was created to provide a secure and permanent future for Project Gutenberg-tm and future generations. To learn more about the Project Gutenberg Literary Archive Foundation and how your efforts and donations can help, see Sections 3 and 4 and the Foundation web page at <http://www.pgla.org>.

### Section 3. Information about the Project Gutenberg Literary Archive Foundation

The Project Gutenberg Literary Archive Foundation is a non profit 501(c)(3) educational corporation organized under the laws of the state of Mississippi and granted tax exempt status by the Internal Revenue Service. The Foundation's EIN or federal tax identification number is 64-6221541. Its 501(c)(3) letter is posted at <http://pglaf.org/fundraising>. Contributions to the Project Gutenberg Literary Archive Foundation are tax deductible to the full extent permitted by U.S. federal laws and your state's laws.

The Foundation's principal office is located at 4557 Melan Dr. S. Fairbanks, AK, 99712., but its volunteers and employees are scattered throughout numerous locations. Its business office is located at 809 North 1500 West, Salt Lake City, UT 84116, (801) 596-1887, email [business@pglaf.org](mailto:business@pglaf.org). Email contact links and up to date contact information can be found at the Foundation's web site and official page at <http://pglaf.org>

For additional contact information:

Dr. Gregory B. Newby  
Chief Executive and Director  
[gbnewby@pglaf.org](mailto:gbnewby@pglaf.org)

### Section 4. Information about Donations to the Project Gutenberg Literary Archive Foundation

Project Gutenberg-tm depends upon and cannot survive without wide spread public support and donations to carry out its mission of increasing the number of public domain and licensed works that can be

freely distributed in machine readable form accessible by the widest array of equipment including outdated equipment. Many small donations (\$1 to \$5,000) are particularly important to maintaining tax exempt status with the IRS.

The Foundation is committed to complying with the laws regulating charities and charitable donations in all 50 states of the United States. Compliance requirements are not uniform and it takes a considerable effort, much paperwork and many fees to meet and keep up with these requirements. We do not solicit donations in locations where we have not received written confirmation of compliance. To SEND DONATIONS or determine the status of compliance for any particular state visit <http://pglaf.org>

While we cannot and do not solicit contributions from states where we have not met the solicitation requirements, we know of no prohibition against accepting unsolicited donations from donors in such states who approach us with offers to donate.

International donations are gratefully accepted, but we cannot make any statements concerning tax treatment of donations received from outside the United States. U.S. laws alone swamp our small staff.

Please check the Project Gutenberg Web pages for current donation methods and addresses. Donations are accepted in a number of other ways including checks, online payments and credit card donations. To donate, please visit: <http://pglaf.org/donate>

Section 5. General Information About Project Gutenberg-tm electronic works.

Professor Michael S. Hart is the originator of the Project Gutenberg-tm concept of a library of electronic works that could be freely shared with anyone. For thirty years, he produced and distributed Project Gutenberg-tm eBooks with only a loose network of volunteer support.

Project Gutenberg-tm eBooks are often created from several printed editions, all of which are confirmed as Public Domain in the U.S. unless a copyright notice is included. Thus, we do not necessarily keep eBooks in compliance with any particular paper edition.

Most people start at our Web site which has the main PG search facility:

<http://www.gutenberg.org>

This Web site includes information about Project Gutenberg-tm, including how to make donations to the Project Gutenberg Literary Archive Foundation, how to help produce our new eBooks, and how to subscribe to our email newsletter to hear about new eBooks.