Title: Vorlesungen ueber die Theorie der Hyperelliptischen Integrale

Author: Leo Koenigsberger

Release Date: August 7, 2010 [EBook #33369]

Language: German

Character set encoding: ISO-8859-1

Produced by Andrew D. Hwang, Ralf Stephan, K. F. Greiner,
Joshua Hutchinson and the Online Distributed Proofreading
Team at http://www.pgdp.net (This file was produced from
images generously made available by Cornell University
Digital Collections)

Anmerkungen der Korrekturleser

Ein Exemplar des Originals wurde dankenswerterweise von der Cornell University Library: Historical Mathematics Monographs Collection zur Verfügung gestellt.

Änderungen der Formatierung wurden stillschweigend vorgenommen.

Diese PDF-Datei wurde für die Anzeige auf einem Bildschirm optimiert, kann bei Bedarf aber leicht für den Druck angepasst werden. Anweisungen dazu finden Sie am Anfang des LaTeX-Quelltextes.

VORLESUNGEN

UEBER DIE THEORIE

DER

HYPERELLIPTISCHEN INTEGRALE

VON

DR. LEO KÖNIGSBERGER,

PROFESSOR DER MATHEMATIK AN DER UNIVERSITÄT ZU WIEN.

LEIPZIG

DRUCK UND VERLAG VON B. G. TEUBNER.

1878.

Vorwort.

Nachdem ich in den letzten Jahren eine Reihe von Arbeiten über die Theorie der hyperelliptischen Integrale veröffentlicht habe, welche die behandelten Gegenstände theils nur kurz und mit Voraussetzung von Verallgemeinerungen früher gegebener Sätze darstellten, theils auch nur die Resultate einzelner Untersuchungen angaben, hielt ich es für zweckmässig, meine Vorlesungen über die Theorie der hyperelliptischen Integrale in zusammenhängender Darstellung zu veröffentlichen, um einerseits auch der Theorie der Integrale an sich und den mit ihnen zusammenhängenden Problemen der Integralrechnung einige Aufmerksamkeit zuzuwenden, andererseits aber auch dieselbe als Basis für eine grössere und eingehendere Bearbeitung der Theorie der hyperelliptischen Functionen benutzen zu können.

Die Literatur der Theorie der hyperelliptischen Integrale ist eine verhältnissmässig kleine, und es genügt hier, von den Fundamentalarbeiten von Abel und Jacobi abgesehen, auf die für diese Theorie wesentlichen Arbeiten von Riemann, Weierstrass, Hermite, Richelot, Clebsch und Gordan, Prym, Neumann und Fuchs hinzuweisen.

Wien, im Mai 1878.

Leo Koenigsberger.

Inhaltsverzeichniss.

Erste Vorlesung.

Einleitung in die Theorie der hyperelliptischen Integrale.

Zweite Vorlesung.

Die hyperelliptischen Integrale erster, zweiter und dritter Gattung.

Dritte Vorlesung.

Herleitung der allgemeinen hyperelliptischen Integrale.

Vierte Vorlesung.

Reduction des allgemeinen hyperelliptischen Integrales etc.

Fünfte Vorlesung.

Beziehungen zwischen den Periodicitätsmoduln etc.

Sechste Vorlesung.

Das Abel'sche Theorem.

Siebente Vorlesung.

Das allgemeine Transformationsproblem etc.

Achte Vorlesung.

Reduction hyperelliptischer Integrale auf niedere Transcendente.

Seite

Neunte Vorlesung.

Die Multiplication und Division der hyperelliptischen Integrale.

Erste Vorlesung.

Einleitung in die Theorie der hyperelliptischen Integrale.

Bezeichnet s eine durch die quadratische Gleichung

$$a_0 s^2 + 2a_1 s + a_2 = 0$$

definirte algebraische Function, in welcher die ganzen Functionen a_0, a_1, a_2 der Variabeln z so beschaffen sind, dass

$$s = -a_1 \pm \sqrt{a_1^2 - a_0 a_2}$$

eine rationale Function von z und einer Quadratwurzel aus einem nur einfache Factoren enthaltenden Polynome $2p+1^{\text{ten}}$ oder $2p+2^{\text{ten}}$ Grades darstellt, so wird der Theorie *der hyperelliptischen Integrale $p-1^{ter}$ Ordnung* ein Ausdruck von der Form

$$F(z, s),$$

worin F eine rationale Function bedeutet oder

$$f\big(z, \sqrt{R(z)}\,\big)$$

zu Grunde gelegt, in welchem f wiederum eine rationale Function und $R(z)$ ein von Doppelfactoren freies Polynom $2p+1^{\text{ten}}$ oder $2p+2^{\text{ten}}$ Grades bezeichnet.

Der geometrische Ort der Variabeln z, von dem die Function

$$f\big(z, \sqrt{R(z)}\,\big)$$

eindeutig abhängt, ist, wie aus den allgemeinen Principien der Functionentheorie bekannt, *eine doppelblättrige Riemann'sche Fläche mit $2p+2$ Verzweigungspunkten, die, wenn $R(z)$ vom $2p+1^{ten}$ Grade, die $2p+1$ Wurzeln dieses Polynoms und der unendlich entfernte Punkt, wenn $R(z)$ ein Polynom des $2p+2^{ten}$ Grades, die $2p+2$ Wurzeln dieses Polynoms sind.*

Es ist aber auch unmittelbar zu sehen,

> *dass jede in der angegebenen Weise verzweigte Function, welche in einer endlichen Anzahl von Punkten von einer endlichen Ordnung unendlich wird, rational aus z und $\sqrt{R(z)}$ zusammengesetzt ist;*

denn da jede mehrdeutige Function S, deren Riemann'sche Fläche aus zwei Blättern besteht, und die nur in einer endlichen Anzahl von Punkten derselben von einer endlichen Ordnung unendlich wird, bekanntlich als Lösung einer quadratischen Gleichung dargestellt werden kann, deren Coefficienten ganze Functionen von z sind, und die Gleichung

$$b_0 S^2 + 2b_1 S + b_2 = 0$$

wieder

$$S = -b_1 \pm \sqrt{{b_1}^2 - b_0 b_2}$$

ergiebt, so wird, wenn die Verzweigung von S dieselbe wie die von s sein soll, das Polynom

$${b_1}^2 - b_0 b_2,$$

wenn es von unpaarem Grade ist, jene $2p+1$ Wurzeln, und wenn von paarem Grade, jene $2p+2$ Wurzeln und nur diese eine ungrade Anzahl mal enthalten müssen, so dass sich also S wieder rational durch z und $\sqrt{R(z)}$ ausdrücken wird.

Es soll nun untersucht werden, ob sich stets eine aus z und $\sqrt{R(z)}$ rational zusammengesetzte, also auf der zweiblättrigen Fläche eindeutige Function bilden lässt, deren Unstetigkeitspunkte *willkürlich* auf dieser Fläche festgelegt sind, wie es für rationale Functionen von z bekanntlich der Fall ist, und die Methode entwickelt werden, vermittels welcher eine solche Function wirklich hergestellt wird.

Seien

$$a_1, a_2, \cdots a_\varrho$$

beliebige ϱ Unstetigkeitspunkte, in denen die Function von der

$$m_1, m_2, \cdots {m_\varrho}^{ten}$$

Ordnung unendlich sein soll, und die so beschaffen seien, dass sie Unstetigkeitspunkte nur für *ein* Blatt der Fläche sind, also nur in der bestimmten Werthecombination

$$a_r, \varepsilon_r \sqrt{R(a_r)},$$

worin ε_r entweder nur die positive oder nur die negative Einheit bedeutet; seien ferner

$$b_1, b_2, \cdots b_\sigma$$

Unstetigkeitspunkte für beide Blätter zugleich, in denen die Function und zwar in den Punkten

$$b_1, \sqrt{R(b_1)}\,; \quad b_2, \sqrt{R(b_2)}\,; \quad \cdots \quad b_\sigma, \sqrt{R(b_\sigma)}$$

resp. von der

$$n_1, n_2, \cdots {n_\sigma}^{ten}$$

Ordnung, in den Punkten

$$b_1, -\sqrt{R(b_1)}\,; \quad b_2, -\sqrt{R(b_2)}\,; \quad \cdots \quad b_\sigma, -\sqrt{R(b_\sigma)}$$

resp. von der

$$\nu_1, \nu_2, \cdots \nu_\sigma{}^{ten}$$

Ordnung unendlich sein soll, wobei angenommen wird, dass die b-Punkte nicht Verzweigungspunkte der Fläche sind, und ohne Beschränkung der Allgemeinheit

$$n_1 \geqq \nu_1, \quad n_2 \geqq \nu_2, \quad \cdots \quad n_\sigma \geqq \nu_\sigma$$

vorausgesetzt werden darf; soll ferner die herzustellende in z und $\sqrt{R(z)}$ rationale Function in den $2p+2$ Verzweigungspunkten

$$\alpha_1, \quad \alpha_2, \ \cdots \ \alpha_{2p+1}, \ \alpha_{2p+2}$$

von der

$$\frac{k_1}{2}, \quad \frac{k_2}{2}, \ \cdots \ \frac{k_{2p+1}}{2}, \quad \frac{k_{2p+2}{}^{ten}}{2}$$

Ordnung unendlich sein, worin, wenn das Polynom $R(z)$ vom $2p+2^{\text{ten}}$ Grade ist, nur $k_{2p+2} = 0$ zu setzen ist, und unterwirft man endlich noch die Function der Bedingung, dass sie im unendlich entfernten Punkte, wenn $R(z)$ vom $2p+2^{\text{ten}}$ Grade ist, auf dem Blatte

$$\infty, +\sqrt{R(\infty)}$$

von der $\tau_1{}^{\text{ten}}$, auf dem Blatte

$$\infty, -\sqrt{R(\infty)}$$

von der $\tau_2{}^{\text{ten}}$ Ordnung unendlich sein soll, worin $\tau_1 \geqq \tau_2$ festgesetzt wird, während, wenn $R(z)$ vom $2p+1^{\text{ten}}$ Grade, also der unendlich entfernte Punkt ein Verzweigungspunkt ist, die Function von der

$$\frac{k^{\,ten}}{2}$$

Ordnung unendlich werden soll, worin k grade oder ungrade sein darf, so werden sich die Bedingungen für die Existenz einer solchen Function und die Methode zu ihrer Herstellung in analytischer Form in den jene Function bestimmenden Grössen leicht entwickeln lassen.

Da sich nämlich jede rationale Function von z und $\sqrt{R(z)}$ in die Form setzen lässt:

$$f\big(z, \sqrt{R(z)}\big) = \frac{\varphi_0(z) + \varphi_1(z)\sqrt{R(z)}}{\psi_0(z) + \psi_1(z)\sqrt{R(z)}},$$

worin

$$\varphi_0(z),\ \varphi_1(z),\ \psi_0(z),\ \psi_1(z)$$

ganze Functionen von z bedeuten, oder auch, wenn Zähler und Nenner mit dem conjugirten Werthe des Nenners multiplicirt wird, in die Form:

$$f\bigl(z, \sqrt{R(z)}\bigr) = \frac{F_0(z) + F_1(z)\sqrt{R(z)}}{F_2(z)},$$

worin wiederum:

$$F_0(z),\ F_1(z),\ F_2(z)$$

ganze Functionen von z vorstellen, von denen wir annehmen dürfen dass sie keinen gemeinsamen Theiler haben, so wird, wie sich unmittelbar einsehen lässt,

$$\begin{aligned} F_2(z) = (z-a_1)^{m_1}(z-a_2)^{m_2}\cdots(z-a_\varrho)^{m_\varrho}(z-b_1)^{n_1}(z-b_2)^{n_2}\cdots(z-b_\sigma)^{n_\sigma} \\ \times(z-\alpha_1)^{\left(\frac{k_1+1}{2}\right)}(z-\alpha_2)^{\left(\frac{k_2+1}{2}\right)}\cdots(z-\alpha_{2p+2})^{\left(\frac{k_{2p+2}+1}{2}\right)} \end{aligned}$$

zu setzen sein, wenn

$$\left(\frac{k_1+1}{2}\right), \left(\frac{k_2+1}{2}\right), \cdots \left(\frac{k_{2p+2}+1}{2}\right)$$

die grössten in diesen Brüchen enthaltenen ganzen Zahlen bedeuten.

Es wird sich nun darum handeln, die Bedingungen zu befriedigen, denen die a- und b-Punkte, die Verzweigungspunkte und der unendlich entfernte Punkt genügen sollten.

Da die Function

$$f\bigl(z, \sqrt{R(z)}\bigr)$$

im Punkte a_r und zwar nur auf dem Blatte

$$a_r, \varepsilon_r\sqrt{R(a_r)}$$

von der m_r^{ten} Ordnung unendlich werden soll, so werden in der Taylor'schen Entwicklung der Function

$$F_0(z) + F_1(z)\sqrt{R(z)}$$

um den Punkt

$$a_r, -\varepsilon_r\sqrt{R(a_r)}$$

herum, die Coefficienten der Potenzen

$$(z-a_r)^0, (z-a_r)^1, \cdots (z-a_r)^{m_r-1}$$

verschwinden müssen, oder es werden die in den Functionen $F_0(z)$ und $F_1(z)$ enthaltenen unbestimmten Coefficienten den Bedingungen unterworfen sein:

$$\begin{aligned}
\Big[F_0(z)+F_1(z)\sqrt{R(z)}\Big]_{z=a_r,\sqrt{R(z)}=-\varepsilon_r\sqrt{R(a_r)}} &= 0,\\
\Big[\frac{d}{dz}\big(F_0(z)+F_1(z)\sqrt{R(z)}\,\big)\Big]_{z=a_r,\sqrt{R(z)}=-\varepsilon_r\sqrt{R(a_r)}} &= 0,\\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
\Big[\frac{d^{m_r-1}}{dz^{m_r-1}}\big(F_0(z)+F_1(z)\sqrt{R(z)}\,\big)\Big]_{z=a_r,\sqrt{R(z)}=-\varepsilon_r\sqrt{R(a_r)}} &= 0,
\end{aligned}$$

und man erhält somit

$$m_1+m_2+\cdots+m_\varrho$$

Bedingungsgleichungen für die Constanten des Zählers.

Die b-Punkte müssen in Folge der Annahme

$$n_1 \geqq \nu_1, \quad n_2 \geqq \nu_2, \quad \cdots \quad n_\sigma \geqq \nu_\sigma$$

der Bedingung unterworfen werden, dass die Function in den Punkten

$$b_1,-\sqrt{R(b_1)}; \quad b_2,-\sqrt{R(b_2)}; \quad \dots \quad b_\sigma,-\sqrt{R(b_\sigma)}$$

nur von der

$$\nu_1, \quad \nu_2, \quad \dots \quad \nu_\sigma{}^{ten}$$

Ordnung unendlich ist, oder dass

$$\begin{aligned}
\Big[F_0(z)+F_1(z)\sqrt{R(z)}\Big]_{z=b_r,\sqrt{R(z)}=-\sqrt{R(b_r)}} &= 0,\\
\Big[\frac{d}{dz}\big(F_0(z)+F_1(z)\sqrt{R(z)}\,\big)\Big]_{z=b_r,\sqrt{R(z)}=-\sqrt{R(b_r)}} &= 0,\\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
\Big[\frac{d^{n_r-\nu_r-1}}{dz^{n_r-\nu_r-1}}\big(F_0(z)+F_1(z)\sqrt{R(z)}\,\big)\Big]_{z=b_r,\sqrt{R(z)}=-\sqrt{R(b_r)}} &= 0,
\end{aligned}$$

wird, woraus sich wiederum

$$n_1-\nu_1+n_2-\nu_2+\cdots+n_\sigma-\nu_\sigma$$

Bedingungen ergeben.

Was ferner die im Endlichen liegenden Verzweigungspunkte der Function betrifft, so wird, wenn k_r eine grade Zahl ist, die entsprechende Festsetzung für die Unstetigkeit keine Bedingung für die Constanten des Zählers liefern, während, wenn k_r ungrade, nothwendig die Bedingung

$$F_0(\alpha_r) = 0$$

wird statthaben müssen, damit die gesuchte Function von der $\frac{k_r}{2}^{ten}$ Ordnung unendlich ist, und wenn somit das Zeichen

$$[k_r] = 0 \text{ oder } = 1$$

ist, je nachdem k_r grade oder ungrade, so wird die Anzahl der aus den im Endlichen liegenden Verzweigungspunkten hervorgehenden Bedingungsgleichungen

$$[k_1] + [k_2] + \cdots + [k_{2p+2}]$$

sein.

Fassen wir nunmehr diejenigen Bedingungen zusammen, welche sich aus den im Endlichen liegenden Unstetigkeitspunkten für die Constanten des Zählers der in z und $\sqrt{R(z)}$ rationalen Function ergeben, so ist die Anzahl derselben

$$\sum_{r=1}^{\varrho} m_r + \sum_{r=1}^{\sigma} (n_r - \nu_r) + \sum_{r=1}^{2p+2} [k_r]\,,$$

worin, wenn $R(z)$ vom $2p+1^{\text{ten}}$ Grade, $k_{2p+2} = 0$ zu setzen ist; und es mag noch bemerkt werden, dass auf diese Weise nicht nur die Anzahl der Bedingungsgleichungen gefunden, sondern auch die Methode zur Bestimmung der Constanten also zur wirklichen Herstellung der Function gegeben sein wird.

Was endlich die für den unendlich entfernten Punkt gemachten Festsetzungen angeht, so wird, wenn $R(z)$ vom $2p+2^{\text{ten}}$ Grade ist, die Entwicklung des Zählers nach fallenden Potenzen von z in der Umgebung des Punktes $\infty, +\sqrt{R(\infty)}$ mit einer Potenz von z beginnen müssen, deren Exponent den Grad des Nenners um τ_1 Einheiten übersteigt, während die ähnliche Entwicklung um den entsprechenden Punkt $\infty, -\sqrt{R(\infty)}$ herum, da $\tau_1 \geqq \tau_2$ angenommen worden, nothwendig so beschaffen sein muss, dass die ersten $\tau_1 - \tau_2$ Coefficienten des Zählers in der vorherigen Entwicklung nach fallenden Potenzen von z, wenn nur $-\sqrt{R(z)}$ statt $+\sqrt{R(z)}$ gesetzt wird, verschwinden, und es werden sich somit

$$\tau_1 - \tau_2$$

Bedingungen für die Coefficienten des Zählers ergeben; ist dagegen $R(z)$ vom $2p+1^{\text{ten}}$ Grade, so wird der Grad des Zählers den des Nenners um $\frac{k}{2}$ Einheiten übersteigen müssen, ohne dass für die Constanten des Zählers Bedingungen eintreten.

Sei also jetzt

$$\text{I.}\quad R(z) \text{ vom } 2p+2^{\text{ten}} \text{ Grade,}$$

so wird man den Grad von

$$F_0(z) \text{ gleich } \sum_{r=1}^{\varrho} m_r + \sum_{r=1}^{\sigma} n_r + \sum_{r=1}^{2p+2} \left(\frac{k_r+1}{2}\right) + \tau_1,$$

den von

$$F_1(z) \text{ gleich } \sum_{r=1}^{\varrho} m_r + \sum_{r=1}^{\sigma} n_r + \sum_{r=1}^{2p+2} \left(\frac{k_r+1}{2}\right) + \tau_1 - p - 1$$

annehmen dürfen, und die Zahl der im Zähler auftretenden willkürlichen Constanten wird, wenn wir von einer multiplicatorischen Constanten absehen,

$$2\sum_{r=1}^{\varrho} m_r + 2\sum_{r=1}^{\sigma} n_r + 2\sum_{r=1}^{2p+2} \left(\frac{k_r+1}{2}\right) + 2\tau_1 - p$$

sein; da aber, wie oben gezeigt worden,

$$\sum_{r=1}^{\varrho} m_r + \sum_{r=1}^{\sigma} (n_r - \nu_r) + \sum_{r=1}^{2p+2} [k_r] + \tau_1 - \tau_2$$

Bedingungen für dieselben stattfinden, so wird, wenn die Function existiren soll, die Zahl der Bedingungen die der willkürlichen Constanten nicht übersteigen dürfen, oder es wird die Ungleichheit bestehen müssen

$$(1)\qquad \sum_{r=1}^{\varrho} m_r + \sum_{r=1}^{\sigma} (n_r + \nu_r) + 2\sum_{r=1}^{2p+2} \left(\frac{k_r+1}{2}\right) - \sum_{r=1}^{2p+2} [k_r] + \tau_1 + \tau_2 - p \geqq 0.$$

Ist

$$\text{II.}\quad R(z) \text{ vom } 2p+1^{\text{ten}} \text{ Grade,}$$

so wird man, wenn $\left(\frac{k}{2}\right)$ die grösste in $\frac{k}{2}$ enthaltene ganze Zahl bedeutet, den Grad von

$$F_0(z) \text{ gleich } \sum_{r=1}^{\varrho} m_r + \sum_{r=1}^{\sigma} n_r + \sum_{r=1}^{2p+1} \left(\frac{k_r+1}{2}\right) + \left(\frac{k}{2}\right),$$

den von

$$F_1(z) \text{ gleich } \sum_{r=1}^{\varrho} m_r + \sum_{r=1}^{\sigma} n_r + \sum_{r=1}^{2p+1} \left(\frac{k_r+1}{2}\right) + \left.\begin{matrix} \left(\frac{k}{2}\right) - p - 1 \\ \left(\frac{k}{2}\right) - p \end{matrix}\right\} \begin{matrix} \text{wenn } k \text{ grade} \\ \text{wenn } k \text{ ungrade} \end{matrix}$$

annehmen dürfen, und die Zahl der willkürlichen Constanten wird somit

$$2\sum_{r=1}^{\varrho} m_r + 2\sum_{r=1}^{\sigma} n_r + 2\sum_{r=1}^{2p+1}\left(\frac{k_r+1}{2}\right) + k - p$$

sein; da nun die Zahl der Bedingungen in diesem Falle

$$\sum_{r=1}^{\varrho} m_r + \sum_{r=1}^{\sigma}(n_r - \nu_r) + \sum_{r=1}^{2p+1}[k_r]$$

ist, so wird für die Existenz der in z und $\sqrt{R(z)}$ rationalen Function die Ungleichheit erfüllt sein müssen

$$(2) \qquad \sum_{r=1}^{\varrho} m_r + \sum_{r=1}^{\sigma}(n_r + \nu_r) + 2\sum_{r=1}^{2p+1}\left(\frac{k_r+1}{2}\right) - \sum_{r=1}^{2p+1}[k_r] + k - p \geqq 0,$$

wodurch zugleich eine Grenze für die Anzahl etwaiger anderer Bedingungen gegeben ist.

Beachtet man endlich, dass, weil $F_1(z)$ eine ganze Function, also der Grad, wenn die gegebene Function nicht nur rational von z abhängen soll, grösser oder gleich Null sein muss, in dem einen oder andern Falle die Ungleichheit bestehen wird:

$$(3) \qquad \sum_{r=1}^{\varrho} m_r + \sum_{r=1}^{\sigma} n_r + \sum_{r=1}^{2p+2}\left(\frac{k_r+1}{2}\right) + \tau_1 - p - 1 \geqq 0,$$

$$(4) \qquad \sum_{r=1}^{\varrho} m_r + \sum_{r=1}^{\sigma} n_r + \sum_{r=1}^{2p+1}\left(\frac{k_r+1}{2}\right) + \left.\begin{matrix}\left(\frac{k}{2}\right) - p - 1 \\ \left(\frac{k}{2}\right) - p \end{matrix}\right\} \begin{matrix}\text{wenn } k \text{ grade} \\ \text{wenn } k \text{ ungrade}\end{matrix}$$

und dass wegen der aus der Definition der Grössen unmittelbar ersichtlichen Beziehung

$$\sum_{r}\left(\frac{k_r+1}{2}\right) - \sum_{r}[k_r] \geqq 0$$

die Ungleichheiten (3) und (4) die Ungleichheiten (1) und (2) zur Folge haben, so werden wir

die Ungleichheiten (3) *und* (4) *als die für die Existenz einer in z und $\sqrt{R(z)}$ rationalen und in der verlangten Weise unstetigen Function notwendigen und hinreichenden Bedingungen anzusehen haben. Zugleich ist durch die obige Behandlung die Methode zur wirklichen Herstellung der Function gegeben.*

So wird sich z. B., wenn die zu bestimmende Function nur in den Punkten

$$a_1, a_2, \cdots a_\varrho$$

und zwar in jedem nur von der ersten Ordnung unendlich, sonst überall endlich sein soll, für beide Fälle die Ungleichheit

$$\varrho \geqq p + 1$$

ergeben, so dass eine in z und $\sqrt{R(z)}$ rationale Function mit weniger als $p + 1$ beliebig gewählten Unstetigkeiten erster Ordnung nicht existirt.

Nachdem die Frage nach der Existenz und wirklichen Herstellung einer in z und $\sqrt{R(z)}$ rationalen Function für den Fall, dass $R(z)$ von paarem oder unpaarem Grade ist, behandelt worden, wollen wir zeigen, dass wir uns im Folgenden nur mit Irrationalitäten zu beschäftigen haben, welche durch eine Quadratwurzel aus einem Polynome unpaaren Grades dargestellt werden, indem sich nachweisen lässt,

dass sich jede aus ζ und $\sqrt{\varphi(\zeta)}$ rational zusammengesetzte Function, worin

$$\varphi(\zeta) = (\zeta - a_1)(\zeta - a_2) \cdots (\zeta - a_{2p+2})$$

ist, durch eine in ζ und z rationale lineare Substitution in eine andere Function verwandeln lässt, welche rational aus z und $\sqrt{R(z)}$ zusammengesetzt ist, wenn

$$R(z) = (z - \alpha_1)(z - \alpha_2) \cdots (z - \alpha_{2p+1})$$

gesetzt wird.

Substituirt man nämlich bei willkürlicher Wahl von α_1

$$\frac{\zeta - a_1}{\zeta - a_{2p+2}} = z - \alpha_1,$$

woraus

$$\zeta = \frac{a_{2p+2} z - (a_1 + \alpha_1 a_{2p+2})}{z - (1 + \alpha_1)}$$

folgt, so wird, wenn statt der entstehenden Constantenverbindungen die Grössen

$$\alpha_2, \ \alpha_3, \ \cdots \ \alpha_{2p+1}$$

gesetzt werden,

$$\zeta - a_2 = (a_{2p+2} - a_2) \frac{z - \alpha_2}{z - (1 + \alpha_1)},$$
$$\zeta - a_3 = (a_{2p+2} - a_3) \frac{z - \alpha_3}{z - (1 + \alpha_1)},$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\zeta - a_{2p+1} = (a_{2p+2} - a_{2p+1}) \frac{z - \alpha_{2p+1}}{z - (1 + \alpha_1)},$$
$$\zeta - a_{2p+2} = (a_{2p+2} - a_1) \frac{1}{z - (1 + \alpha_1)}$$

sein, und sich somit

$$\sqrt{\varphi(\zeta)} = \frac{(a_{2p+2} - a_1)\sqrt{(a_{2p+2} - a_2)\cdots(a_{2p+2} - a_{2p+1})}\sqrt{R(z)}}{\bigl(z - (1 + \alpha_1)\bigr)^{p+1}}$$

ergeben, woraus folgt, dass jede in ζ und $\sqrt{\varphi(\zeta)}$ rationale Function

$$F\bigl(\zeta, \sqrt{\varphi(\zeta)}\,\bigr)$$

durch eine rationale lineare Substitution in eine in z und $\sqrt{R(z)}$ rationale

$$f\bigl(z, \sqrt{R(z)}\,\bigr)$$

umgeformt werden kann, oder dass für die Differentialausdrücke die Transformationsgleichung besteht

$$F\bigl(\zeta, \sqrt{\varphi(\zeta)}\,\bigr)d\zeta = \frac{a_1 - a_{2p+2}}{\bigl(z - (1 + \alpha_1)\bigr)^2}\, f\bigl(z, \sqrt{R(z)}\,\bigr)\, dz.$$

Wir werden uns somit im Folgenden nur mit den Integralen solcher Functionen zu beschäftigen brauchen, welche rational aus der Variabeln und einer Quadratwurzel aus einem Polynome $2p + 1^{\text{ten}}$ Grades dieser Grösse zusammengesetzt sind.

Zweite Vorlesung.

Die hyperelliptischen Integrale erster, zweiter und dritter Gattung.

Man nennt *hyperelliptische Integrale* $p-1^{ter}$ *Ordnung* alle Integrale von der Form

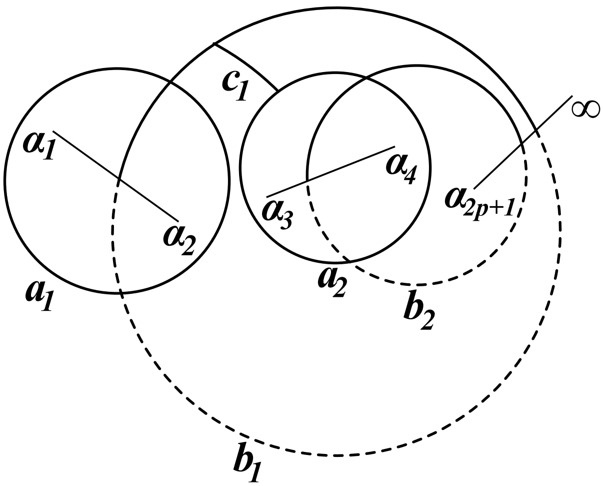
$$\int f\big(z, \sqrt{R(z)}\,\big)\, dz,$$

in denen f eine rationale Function von z und $\sqrt{R(z)}$ bedeutet, und $R(z)$, wie nach den Auseinandersetzungen der vorigen Vorlesung ohne Beschränkung der Allgemeinheit angenommen werden darf, ein Polynom $2p+1^{\text{ten}}$ Grades von der Form

$$R(z) = A(z-\alpha_1)(z-\alpha_2)\cdots(z-\alpha_{2p+1})$$

darstellt.

Fig. 1.



Um die die Function $\sqrt{R(z)}$ repräsentirende doppelblättrige Riemann'sche Fläche, deren Verzweigungsschnitte von α_1, nach α_2, von α_3 nach α_4, u. s. w. endlich von α_{2p+1} in die Unendlichkeit geführt sein mögen, in eine einfach zusammenhängende zu zerlegen, soll zuerst ein im ersten Blatte verlaufender, den Verzweigungsschnitt $\alpha_1\alpha_2$ umschliessender Querschnitt a_1 gezogen werden, und ein zweiter b_1, welcher zwei gegenüberliegende Punkte (s. Fig. 1) von a_1, mit einander verbindet und den Verzweigungsschnitt $\alpha_{2p+1}\infty$ durchschneidet; sodann ziehe man einen dritten Querschnitt a_2, welcher $\alpha_3\alpha_4$ umschliesst und verbinde diesen durch die Linie c_1 mit b_1, ferner einen Querschnitt b_2 von einem Punkte von a_2 zu dem gegenüberliegenden aber so, dass derselbe wiederum den Verzweigungsschnitt $\alpha_{2p+1}\infty$ trifft u. s. w., so wird durch die $2p$ Querschnitte

$$a_1,\ a_2,\ \dots\ a_p,\ b_1,\ b_2,\ \dots\ b_p$$

und die $p-1$ Verbindungslinien c_1, c_2, … c_{p-1}, welche zu den a-Querschnitten hinzuzunehmen sind, die Fläche in eine einfach zusammenhängende zerlegt werden.

Nun soll ein hyperelliptisches Integral *erster Gattung* ein solches genannt werden, welches für *keinen* Punkt der Riemann'schen Fläche unendlich wird, *zweiter Gattung* ein solches, welches nur in *einem* Punkte derselben und zwar *algebraisch von der ersten Ordnung unendlich* ist, endlich ein hyperelliptisches Integral *dritter* Gattung ein solches, welches für *zwei* beliebig gewählte Punkte der Fläche z_1 und z_2 *logarithmisch unendlich* wird und zwar so, dass, wenn das Integral in z_1 unendlich wird wie

$$A_1 \log(z-z_1)$$

und in z_2 wie

$$A_2 \log(z-z_2)$$

zwischen den Coefficienten der Unstetigkeitsfunctionen die Beziehung besteht

$$A_1 + A_2 = 0.\ ^{*)}$$

Dass diese letztere Bedingung eine nothwendige, wenn überhaupt ein hyperelliptisches Integral bestimmbar sein soll, ist leicht einzusehen; denn denkt man sich für dieses Integral die beiden Punkte z_1 und z_2 durch unendlich kleine Kreise ausgeschlossen und die Peripherieen dieser Kreise mit ein und demselben Punkte eines der oben bezeichneten Querschnitte verbunden, so wird offenbar das Integral in einer Curve um diesen Punkt genommen den Werth

$$2\pi i A_1 + 2\pi i A_2$$

*) Für den Fall, dass z_1 oder z_2 Verzweigungspunkte der Fläche sind, wird man nur, damit diese Beziehung bestehen bleibt

$$A_1 \log(z-z_1)^{\frac{1}{2}} \quad \text{oder} \quad A_2 \log(z-z_2)^{\frac{1}{2}}$$

als Unstetigkeitsfunctionen einzuführen brauchen, d. h. die Logarithmen von Functionen, die in diesen Verzweigungspunkten von der ersten Ordnung Null werden.

haben, da der Querschnitt zweimal in entgegengesetzter Richtung überschritten wird, und der von dem Logarithmus herrührende Stetigkeitssprung bekanntlich $2\pi i$ ist; da jedoch der Werth des Integrals auf jener Curve in der ursprünglichen Fläche genommen Null ist, so wird sich

$$A_1 + A_2 = 0$$

ergeben. Zugleich geht hieraus hervor, *dass kein hyperelliptisches Integral existiren kann, welches nur in einem Punkte auf einem Blatte der Riemann'schen Fläche logarithmisch unendlich wird,* da sonst der Coefficient des logarithmischen Gliedes verschwinden müsste.

Es soll nun die Form der hyperelliptischen Integrale erster Gattung, die also in keinem Punkte unendlich sind, aufgestellt werden. Gehen wir von dem allgemeinen hyperelliptischen Integrale

$$\int_{z_0} \frac{\varphi_0(z) + \varphi_1(z)\sqrt{R(z)}}{\psi_0(z) + \psi_1(z)\sqrt{R(z)}}\, dz$$

aus, in welchem

$$\varphi_0(z),\ \varphi_1(z),\ \psi_0(z),\ \psi_1(z),$$

ganze Functionen von z,

$$R(z) = A(z - \alpha_1)(z - \alpha_2)\cdots(z - \alpha_{2p+1}),$$

und z_0 weder ein Verzweigungspunkt noch ein Unstetigkeitspunkt der Function unter dem Integral ist, oder auch von dem Integrale

$$\int_{z_0} \frac{f_0(z) + f_1(z)\sqrt{R(z)}}{\varphi(z)}\, dz,$$

in welchem

$$f_0(z),\ f_1(z),\ \varphi(z)$$

ganze Functionen ohne gemeinsamen Theiler bedeuten.

Sei nun

$$\varphi(z) = (z - a_1)^{k_1}(z - a_2)^{k_2}\cdots,$$

so folgt leicht aus bekannten Sätzen über die Stetigkeit von Integralen unstetiger Functionen, dass, weil das Integral in den Punkten $a_1, a_2, \cdots$ auf beiden Blättern also für die Werthe

$$\pm\sqrt{R(a_1)}, \quad \pm\sqrt{R(a_2)}, \quad \cdots$$

endlich sein soll, $a_1, a_2, \cdots$ zu den Verzweigungspunkten gehören müssen; wird nun

$$\varphi(z) = (z - \alpha_1)^{k_1}(z - \alpha_2)^{k_2}\cdots(z - \alpha_{2p+1})^{k_{2p+1}}$$

gesetzt, so fordert die Bedingung, dass das Integral auch in den Verzweigungspunkten endlich oder dass

$$\left\{(z-\alpha_r)\frac{f_0(z)+f_1(z)\sqrt{R(z)}}{(z-\alpha_1)^{k_1}(z-\alpha_2)^{k_2}\cdots(z-\alpha_{2p+1})^{k_{2p+1}}}\right\}_{z=\alpha_r}=0$$

sei, dass die Grössen

$$k_1,\ k_2,\ \cdots\ k_{2p+1},$$

wie man durch eine leichte Ueberlegung findet, die Null oder die Einheit bedeuten, und $f_0(z)$ durch $\varphi(z)$ theilbar sein muss; es nimmt somit das obige Integral die Form an:

$$\int_{z_0}\frac{(z-\alpha_1)^{k_1}\cdots(z-\alpha_{2p+1})^{k_{2p+1}}F_0(z)+f_1(z)\sqrt{R(z)}}{(z-\alpha_1)^{k_1}\cdots(z-\alpha_{2p+1})^{k_{2p+1}}}\,dz,$$

in welchem auch $F_0(z)$ eine ganze Function von z bedeutet. Beachtet man endlich noch, dass dieses Integral auch im unendlich entfernten Punkte endlich sein soll, und sich daher die Function unter dem Integral mit z multiplicirt für unendlich grosse z der Null nähern muss, so folgt, da $\sqrt{R(z)}$, nach fallenden Potenzen von z entwickelt, nur gebrochene Potenzen enthält, dass

$$F_0(z)=0,$$

und dass, wenn sodann Zähler und Nenner mit der ganzen Function

$$(z-\alpha_1)^{1-k_1}(z-\alpha_2)^{1-k_2}\cdots(z-\alpha_{2p+1})^{1-k_{2p+1}}$$

multiplicirt wird, in dem Integral

$$\int_{z_0}\frac{(z-\alpha_1)^{1-k_1}\cdots(z-\alpha_{2p+1})^{1-k_{2p+1}}f_1(z)}{\sqrt{R(z)}}\,dz$$

der Grad des Zählers die Zahl $p-\frac{1}{2}$ nicht übersteigen, also höchstens der $p-1^{\text{te}}$ sein darf, so dass wir als allgemeinstes hyperelliptisches Integral erster Gattung das folgende erhalten:

$$J(z)=\int_{z_0}\frac{a_0+a_1z+a_2z^2+\cdots+a_{p-1}z^{p-1}}{\sqrt{R(z)}}\,dz,$$

welches sich wiederum aus den einzelnen hyperelliptischen Integralen

$$\int_{z_0}\frac{dz}{\sqrt{R(z)}},\quad\int_{z_0}\frac{z\,dz}{\sqrt{R(z)}},\quad\int_{z_0}\frac{z^2\,dz}{\sqrt{R(z)}},\quad\cdots\quad\int_{z_0}\frac{z^{p-1}\,dz}{\sqrt{R(z)}}$$

zusammensetzt, deren Unabhängigkeit von einander wir später nachweisen werden.

Um das allgemeinste hyperelliptische Integral *zweiter Gattung* zu ermitteln, welches in einem Punkte z_1 eines Blattes der Riemann'schen Fläche, welcher nicht Verzweigungspunkt sein soll, und nur in diesem algebraisch von der ersten Ordnung unendlich wird, gehen wir wieder von dem Ausdrucke des allgemeinen hyperelliptischen Integrales

$$\int_{z_0} \frac{f_0(z) + f_1(z)\sqrt{R(z)}}{\varphi(z)}\, dz$$

aus und schliessen genau wie vorher, dass $\varphi(z)$ ausser für $z = z_1$ nur noch für die Verzweigungspunkte verschwinden kann, und dass ähnlich wie oben das Integral die Form haben muss:

$$\int_{z_0} \frac{(z-\alpha_1)^{k_1}\cdots(z-\alpha_{2p+1})^{k_{2p+1}}F_0(z) + F_1\sqrt{R(z)}}{(z-z_1)^k(z-\alpha_1)^{k_1}\cdots(z-\alpha_{2p+1})^{k_{2p+1}}}\, dz.$$

Berücksichtigt man ferner, dass das Integral in $z = z_1$ nur auf *einem* Blatte algebraisch von der ersten Ordnung unendlich sein soll so ersieht man aus der Annahme, dass Zähler und Nenner keinen Theiler gemeinsam haben, dass $k = 2$ sein muss, weil sonst das Integral auf dem einen oder andern Blatte im Punkte z_1 von einer höheren als der ersten Ordnung unendlich würde, und wenn ausserdem die Bedingung hinzugenommen wird, dass das Integral für $z = \infty$ endlich bleibt, so folgt leicht, dass $F_0(z) = c_1$ eine Constante sein muss, und dass in dem resultirenden Integrale

$$\int_{z_0} \left\{ \frac{c_1}{(z-z_1)^2} + \frac{(z-\alpha_1)^{1-k_1}(z-\alpha_2)^{1-k_2}\cdots(z-\alpha_{2p+1})^{1-k_{2p+1}}F_1(z)}{(z-z_1)^2\sqrt{R(z)}} \right\} dz$$

der Grad des Zählers im zweiten Bruche höchstens der $p+1^{\text{te}}$ sein darf. Da man nun jede ganze Function des $p+1^{\text{ten}}$ Grades in die Form setzen kann:

$$(z-z_1)^2\left[a_{p-1}z^{p-1} + a_{p-2}z^{p-2} + \cdots + a_1 z + a_0\right] + c(z-z_1) + d,$$

weil dieselbe $p+2$ willkürliche Constanten enthält, so geht das obige Integral in die Summe der beiden Integrale

$$\int_{z_0} \left[\frac{c_1}{(z-z_1)^2} + \frac{c(z-z_1)+d}{(z-z_1)^2\sqrt{R(z)}}\right] dz + \int_{z_0} \frac{a_{p-1}z^{p-1} + a_{p-2}z^{p-2} + \cdots + a_0}{\sqrt{R(z)}}\, dz$$

über, von denen das zweite das allgemeine hyperelliptische Integral erster Gattung vorstellt; es bleibt uns daher nunmehr nur noch übrig, den Bedingungen zu genügen, dass aus dem im Punkte z_1 unendlich werdenden Integrale die logarithmische Unendlichkeit herausfällt und nur eine algebraische Unendlichkeit *erster Ordnung* auf *einem* Blatte übrig bleibt. Um der ersten Forderung zu entsprechen, bemerke man, dass für beide Blätter

$$\frac{1}{\sqrt{R(z)}} = \frac{1}{R(z_1)^{\frac{1}{2}}} - \frac{1}{2}\frac{R'(z_1)}{R(z_1)^{\frac{3}{2}}}(z-z_1) + \cdots,$$

und somit der Coefficient von $(z-z_1)^{-1}$ in der Entwicklung der Function unter dem Integralzeichen

$$cR(z_1)^{-\frac{1}{2}} - \tfrac{1}{2}d\frac{R'(z_1)}{R(z_1)^{\frac{3}{2}}}$$

wird, so dass das logarithmische Glied verschwindet, wenn

$$(m) \qquad 2cR(z_1) - dR'(z_1) = 0$$

wird; um endlich noch der letzten Bedingung zu genügen, dass das Integral nur auf demjenigen Blatte im Punkte z_1 algebraisch unendlich von der ersten Ordnung sein soll, welchem der Wurzelwerth $\varepsilon_1 R(z_1)^{\frac{1}{2}}$ entspricht, worin ε_1 die positive oder die negative Einheit bedeutet, sind offenbar die Constanten noch der Bedingung zu unterwerfen, dass der Coefficient der negativen zweiten Potenz in der Entwicklung der Function unter dem Integral nach steigenden Potenzen von $z-z_1$ für den entgegengesetzten Werth der Quadratwurzel verschwinde oder dass

$$(n) \qquad c_1 - d\varepsilon_1 R(z_1)^{-\frac{1}{2}} = 0$$

ist. Mit Benutzung der Gleichungen (m) und (n) geht somit das allgemeinste hyperelliptische Integral zweiter Gattung, wenn noch c_1 durch M ersetzt wird, in

$$E(z) = M\int_{z_0}\left[\frac{1}{(z-z_1)^2} + \frac{\frac{R'(z_1)}{2\varepsilon_1 R(z_1)^{\frac{1}{2}}}(z-z_1) + \varepsilon_1 R(z_1)^{\frac{1}{2}}}{(z-z_1)^2\sqrt{R(z)}}\right]dz + J(z)$$

über, worin $J(z)$ das allgemeine hyperelliptische Integral erster Gattung bedeutet.

Sucht man endlich das allgemeinste hyperelliptische Integral *dritter Gattung* zu bestimmen, das also in zwei beliebigen Punkten z_1, und z_2 logarithmisch unendlich wird und zwar für jeden dieser Punkte auf nur *einem* Blatte, und ausserdem so, wie es oben als nothwendig erkannt worden, dass nämlich die Coefficienten der logarithmischen Glieder sich zu Null ergänzen, so findet man wie früher zuerst wieder die Form:

$$\int_{z_0}\frac{(z-\alpha_1)^{k_1}(z-\alpha_2)^{k_2}\cdots(z-\alpha_{2p+1})^{k_{2p+1}}F_0(z) + F_1(z)\sqrt{R(z)}}{(z-z_1)^k(z-z_2)^l(z-\alpha_1)^{k_1}(z-\alpha_2)^{k_2}\cdots(z-\alpha_{2p+1})^{k_{2p+1}}}\,dz,$$

worin $k_1, \cdots k_{2p+1}$ die Null oder die Einheit bedeuten; da dieses Integral in z_1 und z_2 logarithmisch unendlich sein soll, so muss $k = l = 1$ sein, und da dasselbe ferner im unendlich entfernten Punkte endlich bleiben muss, so wird, wie unmittelbar einzusehen, $F_0(z)$ eine Constante c_1 sein, und der Zähler des zweiten Theiles unter dem Integral

$$\int_{z_0}\left[\frac{c_1}{(z-z_1)(z-z_2)} + \frac{(z-\alpha_1)^{1-k_1}(z-\alpha_2)^{1-k_2}\cdots(z-\alpha_{2p+1})^{1-k_{2p+1}}F_1(z)}{(z-z_1)(z-z_2)\sqrt{R(z)}}\right]dz$$

nothwendig höchstens vom Grade $p+1$. Da sich nun jede ganze Function des $p+1^{\text{ten}}$ Grades in die Form setzen lässt:

$$(z-z_1)(z-z_2)[a_{p-1}z^{p-1}+a_{p-2}z^{p-2}+\cdots+a_1z+a_0]+c(z-z_1)+d(z-z_2),$$

so wird das obige Integral die Form annehmen:

$$\int_{z_0}\left[\frac{c_1}{(z-z_1)(z-z_2)}+\frac{c(z-z_1)+d(z-z_2)}{(z-z_1)(z-z_2)\sqrt{R(z)}}\right]dz+\int_{z_0}\frac{a_{p-1}z^{p-1}+\cdots+a_1z+a_0}{\sqrt{R(z)}}\,dz,$$

in welchem nur noch zwischen den Constanten c_1, c, d eine Beziehung dergestalt zu ermitteln ist, dass dieses Integral in den Punkten z_1 und z_2 nur auf je *einem* Blatte, und zwar für z_1 auf dem zu dem Wurzelwerthe $\varepsilon_1 R(z_1)^{\frac{1}{2}}$, für z_2 auf dem zu $\varepsilon_2 R(z_2)^{\frac{1}{2}}$ gehörigen logarithmisch unendlich werden soll. Diese Bedingung zieht, wie aus der Entwicklung der Function unter dem Integralzeichen unmittelbar einleuchtet, die beiden Gleichungen nach sich:

$$\frac{c_1}{z_1-z_2}-d\,\varepsilon_1 R(z_1)^{-\frac{1}{2}}=0$$
$$\frac{c_1}{z_2-z_1}-c\,\varepsilon_2 R(z_2)^{-\frac{1}{2}}=0,$$

oder

$$c=\frac{c_1}{z_2-z_1}\varepsilon_2 R(z_2)^{\frac{1}{2}},\quad d=\frac{c_1}{z_1-z_2}\varepsilon_1 R(z_1)^{\frac{1}{2}},$$

und es wird sich somit als allgemeinste Form des hyperelliptischen Integrales dritter Gattung, wenn c_1 durch M ersetzt wird, die folgende ergeben:

$$\Pi(z)=M\int_{z_0}\left[\frac{1}{(z-z_1)(z-z_2)}+\frac{\frac{\varepsilon_2 R(z_2)^{\frac{1}{2}}}{z_2-z_1}(z-z_1)+\frac{\varepsilon_1 R(z_1)^{\frac{1}{2}}}{z_1-z_2}(z-z_2)}{(z-z_1)(z-z_2)\sqrt{R(z)}}\right]dz+J(z),$$

worin die Coefficienten der logarithmischen Glieder:

$$\frac{2M}{z_1-z_2}\quad\text{und}\quad\frac{2M}{z_2-z_1},$$

wie es sein muss, sich zu Null ergänzen, oder auch in symmetrischer Form:

$$\Pi(z)=M\int_{z_0}\left[\frac{R(z)^{\frac{1}{2}}+\varepsilon_1 R(z_1)^{\frac{1}{2}}}{z-z_1}-\frac{R(z)^{\frac{1}{2}}+\varepsilon_2 R(z_2)^{\frac{1}{2}}}{z-z_2}\right]\frac{dz}{\sqrt{R(z)}}+J(z).$$

Setzt man

$$M=\frac{z_1-z_2}{2},$$

so sind die Coefficienten der logarithmischen Glieder die positive und negative Einheit, und in diesem Falle wird das Integral dritter Gattung ein *hyperelliptisches Hauptintegral dritter Gattung* genannt.

Um einzusehen, dass eine specielle Lage der Punkte z_1 und z_2 zu einander das hyperelliptische Integral dritter Gattung in das allgemeine zweiter Gattung überführt, lassen wir auf der Fläche von $\sqrt{R(z)}$ den Punkt z_2 in die Umgebung von z_1 rücken, dann wird

$$\varepsilon_2 R(z_2)^{\frac{1}{2}} = \varepsilon_1 R(z_1)^{\frac{1}{2}} + \frac{z_2 - z_1}{1} \frac{1}{2} \frac{R'(z_1)}{\varepsilon_1 R(z_1)^{\frac{1}{2}}} + \cdots$$

oder

$$\frac{\varepsilon_2 R(z_2)^{\frac{1}{2}}}{z_2 - z_1}(z - z_1) = \frac{\varepsilon_1 R(z_1)^{\frac{1}{2}}}{z_2 - z_1}(z - z_1) + \frac{1}{2} \frac{R'(z_1)}{\varepsilon_1 R(z_1)^{\frac{1}{2}}}(z - z_1) + \{z_2 - z_1\}$$

sein, worin

$$\{z_2 - z_1\}$$

eine nach ganzen positiven steigenden Potenzen von $z_2 - z_1$ fortschreitende Reihe bedeutet; da ferner

$$\frac{\varepsilon_1 R(z_1)^{\frac{1}{2}}}{z_1 - z_2}(z - z_2) = \frac{\varepsilon_1 R(z_1)^{\frac{1}{2}}}{z_1 - z_2}(z - z_2) + \varepsilon_1 R(z_1)^{\frac{1}{2}}$$

gesetzt werden kann, so nimmt der erste der zwei obigen Ausdrücke für $\Pi(z)$ die Form an:

$$M \int_{z_0} \left[\frac{1}{(z - z_1)(z - z_2)} + \frac{\frac{1}{2} \frac{R'(z_1)}{\varepsilon_1 R(z_1)^{\frac{1}{2}}}(z - z_1) + \varepsilon_1 R(z_1)^{\frac{1}{2}} + \{z_2 - z_1\}}{(z - z_1)(z - z_2)\sqrt{R(z)}} \right] dz \, + \, J(z),$$

oder, wenn man z_2 unendlich nahe an z_1 rücken, also die beiden Punkte zusammenfallen lässt,

$$M \int_{z_0} \left[\frac{1}{(z - z_1)^2} + \frac{\frac{1}{2} \frac{R'(z_1)}{\varepsilon_1 R(z_1)^{\frac{1}{2}}}(z - z_1) + \varepsilon_1 R(z_1)^{\frac{1}{2}}}{(z - z_1)^2 \sqrt{R(z)}} \right] dz \, + \, J(z);$$

es geht somit das hyperelliptische Integral dritter Gattung für zwei zusammenfallende Unstetigkeitspunkte in das allgemeine hyperelliptische Integral zweiter Gattung über.

Vermöge dieser Eigenschaft wird es möglich sein, das hyperelliptische Integral zweiter Gattung als Differentialquotienten des Integrales dritter Gattung nach einem der beiden Punkte, für welche dasselbe logarithmisch unendlich wird, darzustellen, wenn wir noch die folgende Bemerkung vorausgeschickt haben werden.

Seien

$$\Pi(z, z_1, z_2), \quad \Pi(z, z_2, z_3), \quad \Pi(z, z_3, z_1)$$

drei hyperelliptische Integrale dritter Gattung, welche resp. in den Punkten z_1, z_2; z_2, z_3; z_3, z_1 logarithmisch unendlich werden, und zwar für dieselben Punkte auf denselben Blättern, so dass ihre logarithmischen Glieder in den für die Umgebung dieser singulären Punkte gültigen Entwicklungen lauten:

$$\frac{2M_3}{z_1 - z_2}\log(z - z_1), \qquad \frac{2M_3}{z_2 - z_1}\log(z - z_2),$$

$$\frac{2M_1}{z_2 - z_3}\log(z - z_2), \qquad \frac{2M_1}{z_3 - z_2}\log(z - z_3),$$

$$\frac{2M_2}{z_3 - z_1}\log(z - z_3), \qquad \frac{2M_2}{z_1 - z_3}\log(z - z_1),$$

so sieht man unmittelbar, dass, wenn

$$M_2 = \frac{z_3 - z_1}{z_1 - z_2}M_3, \qquad M_1 = \frac{z_3 - z_2}{z_2 - z_1}M_3$$

gesetzt wird, die logarithmischen Glieder in den Entwicklungen der Summe jener drei Integrale dritter Gattung wegfallen, und diese Summe, weil in der ganzen Riemann'schen Fläche endlich, ein Integral erster Gattung sein wird, dass also die Beziehung gilt:

$$\Pi(z, z_1, z_2) + \Pi(z, z_2, z_3) + \Pi(z, z_3, z_1) = J(z),$$

wenn die M in der angegebenen Weise bestimmt werden. Setzt man daher

$$\int_{z_0}\left[\frac{1}{(z - z_\mu)(z - z_\nu)} + \frac{\frac{\varepsilon_\nu R(z_\nu)^{\frac{1}{2}}}{z - z_\mu}(z - z_\mu) + \frac{\varepsilon_\mu R(z_\mu)^{\frac{1}{2}}}{z_\mu - z_\nu}(z - z_\nu)}{(z - z_\mu)(z - z_\nu)\sqrt{R(z)}}\right]dz = J(z, z_\mu, z_\nu),$$

so folgt mit Rücksicht auf die Form der obigen Integrale

$$M_3 J(z, z_1, z_2) + M_3\frac{z_3 - z_2}{z_2 - z_1}J(z, z_2, z_3) + M_3\frac{z_3 - z_1}{z_1 - z_2}J(z, z_3, z_1) = J(z)$$

oder

$$M_3 J(z, z_1, z_2) = M_3\left\{\frac{(z_1 - z_3)J(z, z_1, z_3) - (z_2 - z_3)J(z, z_2, z_3)}{z_1 - z_2}\right\} + J(z).$$

Lässt man nun z_2 sich auf dem den Punkt z_1 enthaltenden Blatte eben diesem Punkte unendlich nähern, so geht die linke Seite, wie früher gefunden worden, in das allgemeine Integral zweiter Gattung über, während auf der rechten Seite, wenn $z_2 = z_1 + h$ gesetzt wird, die mit M_3 multiplicirte Klammer sich in

$$\frac{(z_1 + h - z_3)J(z, z_1 + h, z_3) - (z_1 - z_3)J(z, z_1, z_3)}{h}$$

$$= (z_1 - z_3)\frac{J(z, z_1 + h, z_3) - J(z, z_1, z_3)}{h} + J(z, z_1 + h, z_3)$$

verwandelt, welche Gleichung für verschwindende h die Form annimmt:

$$(z_1 - z_3)\frac{\partial J(z, z_1, z_3)}{\partial z_1} + J(z, z_1, z_3) = 2\frac{\partial}{\partial z_1}\left[\frac{z_1 - z_3}{2} J(z, z_1, z_3)\right].$$

Es wird sich somit nach der obigen Gleichung

$$M_3 J(z, z_1, z_1) = 2M_3 \frac{\partial}{\partial z_1}\left[\frac{z_1 - z_3}{2} J(z, z_1, z_3)\right] + J(z)$$

ergeben, und da das hyperelliptische Integral

$$\frac{z_1 - z_3}{2} J(z, z_1, z_3)$$

nach der oben gegebenen Definition ein hyperelliptisches Hauptintegral dritter Gattung ist, so findet man,

dass sich das allgemeine hyperelliptische Integral zweiter Gattung mit dem Discontinuitätspunkte erster Ordnung z_1 von einem Integrale erster Gattung abgesehen als das Product einer Constanten in den nach z_1 genommenen Differentialquotienten eines hyperelliptischen Hauptintegrales dritter Gattung darstellen lässt, dessen zweiter logarithmischer Unstetigkeitspunkt ein völlig willkürlicher ist.

Dritte Vorlesung.

Herleitung der allgemeinen hyperelliptischen Integrale aus Unstetigkeitsbedingungen und Darstellung des Dirichlet'schen Princips für dieselben.

Wir wollen nunmehr mit Hülfe der in der letzten Vorlesung aufgestellten hyperelliptischen Integrale der drei Gattungen das allgemeine durch willkürliche Unstetigkeitsbedingungen definirte hyperelliptische Integral darzustellen suchen.

Erwägt man nämlich, dass das Integral zweiter Gattung

$$J(z, z_1, z_1)$$

als eine in der ganzen Riemann'schen Fläche endliche, nur in dem Punkte z_1 des *einen* Blattes wie

$$-\frac{2}{z - z_1}$$

unendlich von der ersten Ordnung werdende Function das Integral einer rationalen Function von z und $\sqrt{R(z)}$ war, welche letztere in der Nähe des Punktes z_1 in dem betrachteten Blatte die Form hat:

$$\frac{2}{(z - z_1)^2} + \varphi(z, z_1),$$

worin $\varphi(z, z_1)$ eine in der Umgebung von z_1 eindeutige und endliche Function von z bedeutet, so folgt, dass das Differential dieser Function nach z_1 in der Umgebung dieses Punktes sich darstellen lässt durch

$$\frac{4}{(z - z_1)^3} + \frac{\partial \varphi(z, z_1)}{\partial z_1},$$

und dass somit das Integral nach z genommen, als Function von z aufgefasst, in der Nähe von z_1 die Form hat:

$$-\frac{2}{(z - z_1)^2} + \psi(z, z_1),$$

worin $\psi(z, z_1)$ in der Umgebung von z_1 endlich und eindeutig ist. Es ist mithin klar, dass der Differentialquotient von $J(z, z_1, z_1)$ in dem Punkte z_1 in dem betrachteten Blatte genommen von der zweiten Ordnung unendlich ist, in allen anderen Punkten, wie die obigen Schlüsse unmittelbar zeigen, endlich bleibt, und dass sich somit jedes in z_1 auf *einem* Blatte allgemein von der zweiten Ordnung wie der Ausdruck

$$\frac{R}{(z-z_1)^2}+\frac{S}{z-z_1}$$

unendlich werdende hyperelliptische Integral durch

$$-\frac{R}{2}\frac{\partial J(z,z_1,z_1)}{\partial z_1}-\frac{S}{2}J(z,z_1,z_1)+J(z)$$

ausdrücken lässt, wenn R und S Constanten bedeuten.

Fährt man mit diesen Schlüssen in genau derselben Weise fort, so folgt, dass jedes hyperelliptische Integral, welches in *einem* Punkte z_1, welcher, wie von Anfang an vorausgesetzt worden, weder ein Verzweigungspunkt noch der unendlich entfernte Punkt sein sollte, von der Art unendlich werden soll, wie eine gegebene Function:

$$(\alpha)\qquad A_1\log(z-z_1)+B_1(z-z_1)^{-1}+C_1(z-z_1)^{-2}+\cdots+K_1(z-z_1)^{-k_1},$$

in *einem* Punkte z_2 wie die Function

$$-A_1\log(z-z_2),$$

im Uebrigen stets endlich ist, sich als ein mit constanten Coefficienten aus einem ersten Integrale, aus der Function

$$\frac{z_1-z_2}{2}J(z,z_1,z_2)$$

und deren Derivirten bis zur k_1^{ten} Ordnung nach dem Unstetigkeitspunkte z_1 additiv gebildeter linearer Ausdruck ergiebt, dessen Coefficienten mit Ausnahme desjenigen des Integrales erster Gattung durch die gegebene Form (α) fest bestimmt sind.

Wir können nunmehr ein hyperelliptisches Integral bestimmen, welches im Punkte z_1 wie

$$A_1\log(z-z_1)+B_1(z-z_1)^{-1}+C_1(z-z_1)^{-2}+\cdots+K_1(z-z_1)^{-k_1},$$

im Punkte z_2 wie

$$A_2\log(z-z_2)+B_2(z-z_2)^{-1}+C_2(z-z_2)^{-2}+\cdots+K_2(z-z_2)^{-k_2}$$

u. s. w., endlich im Punkte z_ν wie

$$A_\nu\log(z-z_\nu)+B_\nu(z-z_\nu)^{-1}+C_\nu(z-z_\nu)^{-2}+\cdots+K_\nu(z-z_\nu)^{-k_\nu}$$

unendlich, im Uebrigen stets endlich sein soll, wenn nur die Bedingung erfüllt wird, dass

$$A_1+A_2+\cdots+A_\nu=0,$$

die in Folge genau derselben Schlüsse, wie sie oben für zwei Unstetigkeitspunkte gemacht worden, nothwendig ist, wenn überhaupt ein Integral von den angegebenen Eigenschaften existiren soll. Denn bildet man ein hyperelliptisches Integral J_1, welches in z_1, wie vorgeschrieben, unendlich ist, ausserdem in z_2 logarithmisch unendlich wie

$$-A_1 \log(z - z_2),$$

im Uebrigen stets endlich; addirt dazu ein Integral J_2, welches in z_2 unendlich wird, wie

$$(A_1 + A_2) \log (z - z_2) + B_2 (z - z_2)^{-1} + C_2 (z - z_2)^{-2} + \cdots + K_2 (z - z_2)^{-k_2},$$

in z_3 dagegen logarithmisch unendlich wie

$$-(A_1 + A_2) \log (z - z_3),$$

sonst stets endlich; fügt man ferner ein Integral J_3 hinzu, welches in z_3 unendlich wird wie

$$(A_1 + A_2 + A_3) \log (z - z_3) + B_3 (z - z_3)^{-1} + C_3 (z - z_3)^{-2} + \cdots + K_3 (z - z_3)^{-k_3},$$

während der Ausdruck

$$-(A_1 + A_2 + A_3) \log (z - z_4)$$

die Art des Unendlichwerdens in einem weiteren Punkte z_4 anzeigt, u. s. w., so werden wir schliesslich in dem Ausdrucke

$$J_1 + J_2 + \cdots + J_{\nu-1}$$

ein Integral erhalten, welches in $z_1,\ z_2\ \cdots\ z_{\nu-1}$ die vorgeschriebenen Unstetigkeiten hat und in dem Punkte z_ν die logarithmische Unstetigkeit

$$-(A_1 + A_2 + \cdots + A_{\nu-1}) \log (z - z_\nu)$$

besitzt, oder nach der in Betreff der A gemachten Voraussetzung so unstetig wird wie

$$A_\nu \log (z - z_\nu);$$

bestimmt man daher endlich ein hyperelliptisches Integral J_ν, welches in z_ν unendlich wird, wie

$$B_\nu (z - z_\nu)^{-1} + C_\nu (z - z_\nu)^{-2} + \cdots + K_\nu (z - z_\nu)^{-k_\nu},$$

so wird

$$J_1 + J_2 + \cdots + J_\nu$$

ein hyperelliptisches Integral sein, welches in den ν Punkten $z_1, z_2, \cdots z_\nu$ die vorgeschriebenen Unstetigkeiten hat, während es im Uebrigen für alle z endlich bleibt, und man sieht wiederum, dass die Coefficienten aller einzelnen Integrale zweiter und dritter Gattung bestimmt sind, nur der Coefficient des hyperelliptischen Integrales erster Gattung unbestimmt bleibt.

Man kann jedoch das gesuchte Integral auch aus ν Integralen von der Beschaffenheit zusammensetzen, dass das erste J_1 in z_1 so unendlich wird, wie das gesuchte Integral dort unendlich sein soll, in einem beliebigen andern Punkte a dagegen wie

$$-A_1 \log(z-a);$$

J_2 in z_2 so unendlich wie das gesuchte Integral und in demselben Punkte a wie

$$-A_2 \log(z-a);$$

u. s. w., endlich J_ν in z_ν so unendlich, wie gefordert, aber in a wie

$$-A_\nu \log(z-a);$$

dann wird offenbar

$$J_1 + J_2 + \cdots + J_\nu$$

in $z_1, z_2, \cdots z_\nu$ so unendlich werden wie gefordert, und wegen

$$A_1 + A_2 \cdots + A_\nu = 0$$

in $z = a$ endlich sein, so dass sich diese Summe von dem gesuchten Integral wieder nur um ein Integral erster Gattung unterscheiden kann.

Wir können dieses Resultat noch in ganz anderer Form aussprechen; da nämlich die Riemann'sche Fläche von $\sqrt{R(z)}$ aus zwei Blättern mit $p+1$ Verzweigungsschnitten besteht und durch $2p$ Querschnitte in eine einfach zusammenhängende Fläche zerlegt wird, so wird jedes hyperelliptische Integral beim Ueberschreiten eines dieser Querschnitte je einen Stetigkeitssprung machen oder $2p$ Periodicitätsmoduln haben, wobei für die Integrale mit logarithmischen Unstetigkeiten noch diejenigen Stetigkeitssprünge hinzutreten, welche vom Ueberschreiten der von den Unstetigkeitspunkten aus nach den Querschnitten gezogenen Linien herrühren; diese letzteren mag man sich sämmtlich der Einfachheit der folgenden Darstellung wegen nach einem und demselben Punkte eines der $2p$ Querschnitte gezogen denken, und wir werden dann von je *einem* Periodicitätsmodul des allgemeinen hyperelliptischen Integrales für die ganze Länge eines jeden der $2p$ Querschnitte sprechen können, weil nur solche Punkte ausgeschlossen werden, in denen das Integral logarithmisch unendlich wird, und das successive Ueberschreiten *aller* von diesen herrührenden Verbindungslinien nach der oben für die Existenz des Integrals als nothwendig erkannten

Annahme gar keine Werthveränderung hervorbringt. Nun kann man offenbar das in dem oben gefundenen hyperelliptischen Integrale noch unbestimmt gebliebene Integral erster Gattung derart bestimmen, dass die reellen Theile der $2p$ genannten Periodicitätsmoduln oder die p Periodicitätsmoduln an den a-Linien oder die p an den b-Linien selbst gegebene Werthe annehmen, wobei zu beachten, dass das Ueberschreiten der Querschnitte c gar keine Werthveränderung hervorbringt, d. h. der Periodicitätsmodul an diesen Querschnitten verschwindet, weil, um von einem Punkte desselben auf der einfach zusammenhängenden Fläche zu dem gegenüberliegenden zu gelangen, je zwei der andern Querschnitte auf ihren beiden Seiten in entgegengesetzter Richtung durchlaufen werden müssen. Setzt man nämlich die Coefficienten der p unabhängigen Integrale erster Gattung:

$$\int_{z_0} \frac{dz}{\sqrt{R(z)}}, \quad \int_{z_0} \frac{z\,dz}{\sqrt{R(z)}}, \quad \cdots \quad \int_{z_0} \frac{z^{p-1}\,dz}{\sqrt{R(z)}},$$

aus denen das allgemeine hyperelliptische Integral erster Gattung besteht, in die Form:

$$\lambda_0 + \lambda_0' i, \quad \lambda_1 + \lambda_1' i, \quad \cdots \quad \lambda_{p-1} + \lambda_{p-1}' i,$$

so wird das gesammte Integral, wenn die Werthveränderung aller Theile mit Ausnahme des Integrales erster Gattung beim Ueberschreiten des Querschnittes a_k mit

$$P_k + Q_k i,$$

des Querschnittes b_k mit

$$R_k + S_k i,$$

die des Integrales erster Gattung

$$\int_{z_0} \frac{z^{m-1} dz}{\sqrt{R(z)}}$$

au dem Querschnitte a_k mit

$$\alpha_k^{(m-1)} + \gamma_k^{(m-1)} i,$$

und an dem Querschnitte b_k mit

$$\beta_k^{(m-1)} + \delta_k^{(m-1)} i$$

bezeichnet werden, für die $2p$ Querschnitte die Stetigkeitssprünge erleiden:

$$P_1 + Q_1 i + (\lambda_0 + \lambda_0' i)(\alpha_1^{(0)} + \gamma_1^{(0)} i) + (\lambda_1 + \lambda_1' i)(\alpha_1^{(1)} + \gamma_1^{(1)} i) + \cdots$$
$$+(\lambda_{p-1} + \lambda_{p-1}' i)(\alpha_1^{(p-1)} + \gamma_1^{(p-1)} i) = U_1 + V_1 i,$$

$$P_2 + Q_2 i + (\lambda_0 + \lambda_0' i)(\alpha_2^{(0)} + \gamma_2^{(0)} i) + (\lambda_1 + \lambda_1' i)(\alpha_2^{(1)} + \gamma_2^{(1)} i) + \cdots$$
$$+(\lambda_{p-1} + \lambda_{p-1}' i)(\alpha_2^{(p-1)} + \gamma_2^{(p-1)} i) = U_2 + V_2 i,$$

. . . .

$$P_p + Q_p i + (\lambda_0 + \lambda_0' i)(\alpha_p^{(0)} + \gamma_p^{(0)} i) + (\lambda_1 + \lambda_1' i)(\alpha_p^{(1)} + \gamma_p^{(1)} i) + \cdots$$
$$+(\lambda_{p-1} + \lambda_{p-1}' i)(\alpha_p^{(p-1)} + \gamma_p^{(p-1)} i) = U_p + V_p i,$$

$$R_1 + S_1 i + (\lambda_0 + \lambda_0' i)(\beta_1^{(0)} + \delta_1^{(0)} i) + (\lambda_1 + \lambda_1' i)(\beta_1^{(1)} + \delta_1^{(1)} i) + \cdots$$
$$+(\lambda_{p-1} + \lambda_{p-1}' i)(\beta_1^{(p-1)} + \delta_1^{(p-1)} i) = W_1 + T_1 i,$$

$$R_2 + S_2 i + (\lambda_0 + \lambda_0' i)(\beta_2^{(0)} + \delta_2^{(0)} i) + (\lambda_1 + \lambda_1' i)(\beta_2^{(1)} + \delta_2^{(1)} i) + \cdots$$
$$+(\lambda_{p-1} + \lambda_{p-1}' i)(\beta_2^{(p-1)} + \delta_2^{(p-1)} i) = W_2 + T_2 i,$$

. . . .

$$R_p + S_p i + (\lambda_0 + \lambda_0' i)(\beta_p^{(0)} + \delta_p^{(0)} i) + (\lambda_1 + \lambda_1' i)(\beta_p^{(1)} + \delta_p^{(1)} i) + \cdots$$
$$+(\lambda_{p-1} + \lambda_{p-1}' i)(\beta_p^{(p-1)} + \delta_p^{(p-1)} i) = W_p + T_p i,$$

sollen nun entweder

$$U_1,\ U_2, \cdots U_p, \quad W_1,\ W_2, \cdots W_p$$

oder

$$U_1 + V_1 i,\ U_2 + V_2 i, \cdots U_p + V_p i$$

oder auch

$$W_1 + T_1 i,\ W_2 + T_2 i, \cdots W_p + T_p i$$

gegeben sein, so werden entweder die $2p$ eben aufgestellten Gleichungen durch Identificirung der reellen Theile der beiden Seiten der obigen Gleichungen $2p$ lineare Gleichungen zur Bestimmung von $\lambda_0, \cdots \lambda_{p-1}, \lambda_0', \cdots \lambda_{p-1}'$ liefern, oder es werden sich aus den p linearen Gleichungen, welche der zweiten Annahme entsprechen, die p Werthe von $\lambda_0 + \lambda_0' i$, $\cdots \lambda_{p-1} + \lambda_{p-1}' i$ ergeben, in jedem Falle also durch jene Bestimmung die Werthe der noch willkürlich gebliebenen Coefficienten des hyperelliptischen Integrales erster Gattung fest bestimmt sein, vorausgesetzt, dass die zur Bestimmung der λ sich ergebenden $2p$ resp. p in diesen Grössen linearen Gleichungen eindeutig bestimmte Werthe dieser Grössen liefern, oder dass die Determinante dieses Systems nicht Null ist; dass dies aber nicht der Fall sein kann, soll gleich nachher durch einen Satz bewiesen werden, der später die Grundlage für die Einführung der ϑ-Functionen in die Theorie der hyperelliptischen Integrale bilden wird. Nehmen wir die eindeutige Bestimmung jener Coefficienten als erwiesen an, so folgt,

> *dass es stets ein zu einer bestimmten doppelblättrigen Riemann'schen Fläche mit $2p+1$ Verzweigungspunkten gehöriges, von dem willkürlichen, aber bestimmten und nicht singulären Werthe z_0 ausgehendes hyperelliptisches Integral giebt, welches in ν beliebig gewählten Punkten,* zu welchen vorerst weder Verzweigungspunkte noch der unendlich entfernte Punkt gehören sollen, *Unstetigkeiten von der Form*
>
> $$A_\alpha \log(z - z_\alpha) + B_\alpha (z - z_\alpha)^{-1} + C_\alpha (z - z_\alpha)^{-2} + \cdots + K_\alpha (z - z_\alpha)^{-k_\alpha}$$
>
> *hat, worin $\alpha = 1, 2, \cdots \nu$ zu setzen ist und*
>
> $$A_1 + A_2 + \cdots + A_\nu = 0$$
>
> *angenommen wurde, und für welches ferner die reellen Theile der Periodicitätsmoduln an den $2p$ Querschnitten der in eine einfach zusammenhängende Fläche verwandelten Riemann'schen Fläche von $\sqrt{R(z)}$ oder p dieser Periodicitätsmoduln selbst gegebene Werthe haben.*

Es ist aber leicht einzusehen,

> *dass es nur ein solches von z_0 anfangendes hyperelliptisches Integral giebt;*

denn seien J und J_1 zwei hyperelliptische Integrale, welche den angeführten Bedingungen Genüge leisten, so wird $J - J_1$ ein von z_0 nach z sich erstreckendes hyperelliptisches Integral sein, welches, da die beiden Functionen in denselben ν Punkten in derselben Weise unendlich werden, in der ganzen Fläche endlich ist, und ausserdem entweder an den $2p$ Querschnitten nur rein imaginäre Stetigkeitssprünge hat, wenn die reellen Theile der sämmtlichen Periodicitätsmoduln dieselben Werthe haben, oder für welches p Periodicitätsmoduln verschwinden, wenn p Stetigkeitssprünge für beide Integrale einander gleich sind; es wäre somit $J - J_1$ ein von z_0 nach z sich erstreckendes hyperelliptisches Integral erster Gattung, für welches die reellen Theile der $2p$ Periodicitätsmoduln verschwinden oder p Periodicitätsmoduln selbst Null sind, was nach dem gleich zu erweisenden und oben nur unter anderer Form benutzten Satze unmöglich ist.

Aber wir wollen ausserdem zeigen,

dass jede andere Function von z, welche in den Punkten z_1, z_2, $\cdots$ z_ν, so unendlich ist wie:

$$A_\alpha \log(z - z_\alpha) + B_\alpha (z - z_\alpha)^{-1} + C_\alpha (z - z_\alpha)^{-2} + \cdots + K_\alpha (z - z_\alpha)^{-k_\alpha},$$

worin $\alpha = 1, 2, \ldots \nu$ zu setzen ist, d. h. sich von diesen Functionen in den Punkten $z_1, z_2, \ldots z_\nu$ nur um endliche und eindeutige Functionen unterscheidet, welche ferner in der vorgelegten Fläche, welche nach Ausschliessung der Unstetigkeitspunkte in eine einfach zusammenhängende verwandelt worden, eindeutig ist und beim Ueberschreiten der $2p$ Querschnitte a und b gegebene reelle Theile von Periodicitätsmoduln hat oder in den p a- oder in den p b-Querschnitten gegebene Periodicitätsmoduln besitzt, von dem oben gefundenen hyperelliptischen Integrale nur um eine Constante verschieden ist.

Denn sei $F(z)$ eine solche Function, so wird die Function

$$\frac{dF(z)}{dz}$$

offenbar in der ursprünglichen, mit Hülfe der a- und b-Querschnitte einfach zusammenhängenden Fläche, in welcher die Unstetigkeitspunkte wegen der algebraischen Unstetigkeiten nicht ausgeschlossen zu werden brauchen, eindeutig sein, da die Ableitung einer in einem Punkte eindeutigen Function auch wieder eindeutig ist; da sich aber die Functionalwerthe zu beiden Seiten eines a- oder b-Querschnittes längs demselben um dieselbe Constante unterscheiden, so wird das Verhältniss der Differenz der Functionalwerthe zu dz bei unendlicher Annäherung an den Querschnitt sich derselben Gränze nähern, d. h. die Ableitung von $F(z)$ auch an den Querschnitten eindeutig sein, oder anders ausgesprochen, es ist

$$\frac{dF(z)}{dz}$$

eine in der mehrfach zusammenhängenden Riemann'schen Fläche von $\sqrt{R(z)}$ eindeutige Function von z. Was ferner die Unstetigkeiten der Ableitungen von $F(z)$ betrifft, so ist, wie schon hervorgehoben, klar, dass diese Function in denjenigen Punkten unendlich gross wird, in denen $F(z)$ es selbst ist, d. h. in den Punkten z_1, z_2, $\cdots$ z_ν und zwar, wie unmittelbar ersichtlich, wie die Functionen:

$$\begin{gathered}
A_1 (z - z_1)^{-1} - B_1 (z - z_1)^{-2} - 2C_1 (z - z_1)^{-3} - \cdots - k_1 K_1 (z - z_1)^{-k_1 - 1} \\
A_2 (z - z_2)^{-1} - B_2 (z - z_2)^{-2} - 2C_2 (z - z_2)^{-3} - \cdots - k_2 K_2 (z - z_2)^{-k_2 - 1} \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
A_\nu (z - z_\nu)^{-1} - B_1 (z - z_\nu)^{-2} - 2C_\nu (z - z_\nu)^{-3} - \cdots - k_\nu K_\nu (z - z_\nu)^{-k_\nu - 1},
\end{gathered}$$

also in all' diesen Punkten von einer *endlichen* Ordnung algebraisch unendlich; ausserdem kann aber eine Function von endlicher Vieldeutigkeit — $\frac{dF(z)}{dz}$ war auf der vorgelegten doppelblättrigen Fläche eindeutig — in gewissen Punkten unendlich sein, wenn auch ihr Integral in diesem Punkte endlich ist, doch kann dies bekanntlich nur in den Verzweigungspunkten dieser Function stattfinden, also nur in einer endlichen Anzahl von Punkten von einer endlichen Ordnung. *Es wird daher die Ableitung von $F(z)$ als eine in der Riemann'schen Fläche von $\sqrt{R(z)}$ stets eindeutige und in einer endlichen Anzahl von Punkten von einer endlichen Ordnung unendlich werdende Function von z* nach der ersten Vorlesung *eine rationale Function von*

$$z \text{ und } \sqrt{R(z)}$$

d. h. $F(z)$ ein hyperelliptisches Integral, und somit bis auf eine, willkürliche, additive Constante das eine oben gefundene Integral sein. Es giebt daher überhaupt nur eine Function, welche den oben aufgestellten Bedingungen genügt.

Der eben erwiesene Satz von der eindeutigen Bestimmung der Function, welche den für die Punkte der Fläche der hyperelliptischen Integrale angegebenen Bedingungen Genüge leistet, ist das Dirichlet'sche Princip für diese Klasse von Flächen.

Bevor wir nun zum Beweise des oben erwähnten Satzes, die Periodicitätsmoduln betreffend, übergehen, mag noch eine Bemerkung Platz finden, welche die Unstetigkeiten der hyperelliptischen Integrale in den Verzweigungspunkten und dem unendlich entfernten Punkte angeht.

Definirt man in einem der Verzweigungspunkte

$$\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_{2p+1}$$

der doppelblättrigen Fläche die Grösse

$$(z-\alpha_\varrho)^{-\frac{1}{2}}$$

als von der ersten Ordnung unendlich gross und nennt wieder ein Integral zweiter Gattung ein solches, welches nur *eine* solche Unstetigkeit besitzt, und ein Integral dritter Gattung ein solches, welches in diesem Punkte wie

$$A \log{(z-\alpha_\varrho)^{\frac{1}{2}}}$$

unendlich gross wird, während es in einem beliebigen andern nicht mehrfachen Punkte ζ wie

$$A' \log{(z-\zeta)}$$

unendlich ist, und, wie schon früher hervorgehoben worden,

$$A + A' = 0$$

sein muss, so erfahren die vorher gemachten Auseinandersetzungen, wenn die Forderung gestellt wird, dass ein hyperelliptisches Integral in einem der Verzweigungspunkte α unendlich sein soll wie

$$A \log r + Br^{-1} + Cr^{-2} + \cdots + Kr^{-k},$$

worin

$$r = (z - \alpha_\varrho)^{\frac{1}{2}}$$

zu nehmen ist, nur geringe Modifikationen; es bedarf keines weiteren Beweises, dass das in $z = \alpha_\varrho$ unendlich werdende allgemeine hyperelliptische Integral zweiter Gattung von der Form ist

$$M \int_{z_0} \frac{dz}{(z - \alpha_\varrho)\sqrt{R(z)}} + J(z),$$

wenn $J(z)$ wieder ein Integral erster Gattung bedeutet, und das allgemeine hyperelliptische Integral dritter Gattung für die Unstetigkeitspunkte α_ϱ und ζ, $\varepsilon R(\zeta)^{\frac{1}{2}}$ durch den Ausdruck bestimmt ist

$$M \int_{z_0} \left[\frac{\alpha_\varrho - \zeta}{2(z - \alpha_\varrho)(z - \zeta)} - \frac{\varepsilon R(\zeta)^{\frac{1}{2}}}{2(z - \zeta)\sqrt{R(z)}} \right] dz + J(z),$$

und ebenso leicht sieht man ein, dass die successive Differentiation dieser beiden Integrale nach dem Parameter α_ϱ die hyperelliptischen Integrale liefern wird, welche in diesem Verzweigungspunkte von einer ganzen oder gebrochenen Ordnung algebraisch unendlich werden.

Um endlich noch den unendlich entfernten Punkt zu berücksichtigen, so erkennt man leicht aus bekannten Criterien, dass das allgemeine hyperelliptische Integral, welches in diesem unendlich entfernten Verzweigungspunkte von der ersten Ordnung also wie $z^{\frac{1}{2}}$ unendlich gross wird, die Form hat

$$M \int_{z_0} \frac{z^p \, dz}{\sqrt{R(z)}} + J(z),$$

und dass allgemein jedes hyperelliptische Integral, welches nur im Punkte $z = \infty$ von der $\dfrac{k}{2}^{\text{ten}}$ Ordnung mit Einschluss von Unstetigkeiten niederer Ordnung unendlich ist, wobei k eine ungerade Zahl sein soll, sich darstellen lässt durch

$$M \int_{z_0} \frac{z^{p + \frac{k-1}{2}} \, dz}{\sqrt{R(z)}} + J(z),$$

während

$$\int_{z_0} z^{\mu - 1} \, dz + J(z)$$

ein hyperelliptisches Integral ist, welches nur in $z=\infty$ von der ganzzahligen Ordnung μ unendlich wird.

Endlich wird

$$M\int_{z_0}\left[\frac{1}{2(z-\zeta)}+\frac{\varepsilon R(\zeta)^{\frac{1}{2}}}{2(z-\zeta)\sqrt{R(z)}}\right]dz+J(z)$$

ein Integral dritter Gattung vorstellen, das in den Punkten $z=\infty$ und $z=\zeta$ logarithmisch unendlich wird wie der Logarithmus einer unendlich kleinen Grösse erster Ordnung.

Wie mit Hülfe dieser Formen das allgemeinste hyperelliptische Integral mit willkürlichen algebraischen und logarithmischen Unstetigkeiten zusammengesetzt ist, bedarf nunmehr keiner weiteren Auseinandersetzung.

Es bleibt nun noch zur Vervollständigung der eben gemachten Auseinandersetzungen übrig nachzuweisen, dass in dem obigen System von $2p$ resp. p Gleichungen zur Bestimmung der Coefficienten $\lambda+\lambda' i$ der unabhängigen hyperelliptischen Integrale erster Gattung die Determinante nicht verschwinden kann. Wenn nämlich für den Fall, dass wir die $2p$ reellen Theile der $2p$ Periodicitätsmoduln des Integrals erster Gattung als gegeben betrachten wollen, die Determinante der Gleichungen

$$\begin{aligned}
&\lambda_0\alpha_1^{(0)}-\lambda_0'\gamma_1^{(0)}+\lambda_1\alpha_1^{(1)}-\lambda_1'\gamma_1^{(1)}+\cdots+\lambda_{p-1}\alpha_1^{(p-1)}-\lambda_{p-1}'\gamma_1^{(p-1)}=U_1-P_1\\
&\lambda_0\alpha_2^{(0)}-\lambda_0'\gamma_2^{(0)}+\lambda_1\alpha_2^{(1)}-\lambda_1'\gamma_2^{(1)}+\cdots+\lambda_{p-1}\alpha_2^{(p-1)}-\lambda_{p-1}'\gamma_2^{(p-1)}=U_2-P_2\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
&\lambda_0\alpha_p^{(0)}-\lambda_0'\gamma_p^{(0)}+\lambda_1\alpha_p^{(1)}-\lambda_1'\gamma_p^{(1)}+\cdots+\lambda_{p-1}\alpha_p^{(p-1)}-\lambda_{p-1}'\gamma_p^{(p-1)}=U_p-P_p\\
&\lambda_0\beta_1^{(0)}-\lambda_0'\delta_1^{(0)}+\lambda_1\beta_1^{(1)}-\lambda_1'\delta_1^{(1)}+\cdots+\lambda_{p-1}\beta_1^{(p-1)}-\lambda_{p-1}'\delta_1^{(p-1)}=W_1-T_1\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
&\lambda_0\beta_p^{(0)}-\lambda_0'\delta_p^{(0)}+\lambda_1\beta_p^{(1)}-\lambda_1'\delta_p^{(1)}+\cdots+\lambda_{p-1}\beta_p^{(p-1)}-\lambda_{p-1}'\delta_p^{(p-1)}=W_p-T_p
\end{aligned}$$

verschwindet, so wird man $2p$ Grössen

$$\mu_0,\mu_0',\mu_1,\mu_1',\dots\mu_{p-1},\mu_{p-1}'$$

bestimmen können, die nicht alle verschwinden und dem Gleichungssystem genügen

$$\begin{aligned}
&\mu_0\alpha_1^{(0)}-\mu_0'\gamma_1^{(0)}+\mu_1\alpha_1^{(1)}-\mu_1'\gamma_1^{(1)}+\cdots+\mu_{p-1}\alpha_1^{(p-1)}-\mu_{p-1}'\gamma_1^{(p-1)}=0\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
&\mu_0\alpha_p^{(0)}-\mu_0'\gamma_p^{(0)}+\mu_1\alpha_p^{(1)}-\mu_1'\gamma_p^{(1)}+\cdots+\mu_{p-1}\alpha_p^{(p-1)}-\mu_{p-1}'\gamma_p^{(p-1)}=0\\
&\mu_0\beta_1^{(0)}-\mu_0'\delta_1^{(0)}+\mu_1\beta_1^{(1)}-\mu_1'\delta_1^{(1)}+\cdots+\mu_{p-1}\beta_1^{(p-1)}-\mu_{p-1}'\delta_1^{(p-1)}=0\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
&\mu_0\beta_p^{(0)}-\mu_0'\delta_p^{(0)}+\mu_1\beta_p^{(1)}-\mu_1'\delta_p^{(1)}+\cdots+\mu_{p-1}\beta_p^{(p-1)}-\mu_{p-1}'\delta_p^{(p-1)}=0,
\end{aligned}$$

wenn nicht etwa alle Coefficienten α_r, β_r, γ_r, δ_r oder wenn nicht sämmtliche Periodicitätsmoduln der p selbständigen Integrale erster Gattung verschwinden, was nachher als nicht statthaft erwiesen wird. Das Bestehen dieses Gleichungssystems ist aber identisch damit, dass für das Integral erster Gattung

$$(\mu_0+\mu_0'i)\int_{z_0}\frac{dz}{\sqrt{R(z)}}+(\mu_1+\mu_1'i)\int_{z_0}\frac{z\,dz}{\sqrt{R(z)}}+\cdots+(\mu_{p-1}+\mu_{p-1}'i)\int_{z_0}\frac{z^{p-1}dz}{\sqrt{R(z)}}$$
$$=\int_{z_0}\frac{(\mu_0+\mu_0'i)+(\mu_1+\mu_1'i)z+\cdots+(\mu_{p-1}+\mu_{p-1}'i)z^{p-1}}{\sqrt{R(z)}}\,dz$$

die reellen Theile sämmtlicher Periodicitätsmoduln verschwinden, was, wie sogleich gezeigt werden soll, nicht möglich ist. Es soll nämlich im Folgenden bewiesen werden, *dass, wenn die Periodicitätsmoduln eines beliebigen hyperelliptischen Integrales erster Gattung*

$$\int_{z_0}\frac{C_0+C_1z+C_2z^2+\cdots+C_{p-1}z^{p-1}}{\sqrt{R(z)}}\,dz$$

an den Querschnitten a_k bei noch näher anzugebender Richtung des Ueberschreitens derselben mit

$$\alpha_k+\gamma_k i,$$

an den Querschnitten b_k mit

$$\beta_k+\delta_k i$$

bezeichnet werden, die Ungleichheit besteht

$$\sum_{\nu=1}^{p}(\alpha_\nu\delta_\nu-\beta_\nu\gamma_\nu)>0,$$

somit auch nicht, worauf oben Bezug genommen war, α_ν und β_ν für alle ν verschwinden dürfen. Und es würde weiter aus diesem Satze folgen, dass, wenn nicht die $2p$ reellen Theile der Periodicitätsmoduln, sondern die p Periodicitätsmoduln des Integrals an den a-Querschnitten oder die p an den b-Querschnitten gegeben sind, die Bestimmung der Grössen $\lambda_\nu+\lambda_\nu'i$ in dem früher aufgestellten Gleichungssystem eindeutig möglich sein muss; denn wenn z. B. die Determinante des Gleichungssystems

$$(\lambda_0+\lambda_0'i)(\alpha_1^{(0)}+\gamma_1^{(0)}i)+(\lambda_1+\lambda_1'i)(\alpha_1^{(1)}+\gamma_1^{(1)}i)+\cdots$$
$$+(\lambda_{p-1}+\lambda_{p-1}'i)(\alpha_1^{(p-1)}+\gamma_1^{(p-1)}i)=U_1-P_1+(V_1-Q_1)i$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$(\lambda_0+\lambda_0'i)(\alpha_p^{(0)}+\gamma_p^{(0)}i)+(\lambda_1+\lambda_1'i)(\alpha_p^{(1)}+\gamma_p^{(1)}i)+\cdots$$
$$+(\lambda_{p-1}+\lambda_{p-1}'i)(\alpha_p^{(p-1)}+\gamma_p^{(p-1)}i)=U_p-P_p+(V_p-Q_p)i$$

verschwindet, so würde sich wieder nach denselben Schlüssen wie vorher ein Integral erster Gattung finden lassen, für welches sämmtliche Periodicitätsmoduln an den a-Querschnitten verschwinden, was ebenfalls nach der zu beweisenden Relation

$$\sum_{\nu=1}^{p}(\alpha_\nu\delta_\nu - \beta_\nu\gamma_\nu) > 0$$

nicht möglich ist, da, wenn $\alpha_\nu = \gamma_\nu = 0$ wäre, diese Summe verschwinden würde.

Um den oben ausgesprochenen Satz zu begründen, gehen wir von dem allgemeinen hyperelliptischen Integrale erster Gattung

$$\int_{z_0} \frac{C_0 + C_1 z + C_2 z^2 + \cdots + C_{p-1} z^{p-1}}{\sqrt{R(z)}}\, dz = u + vi$$

aus, worin

$$z = x + yi,$$

und u und v reelle Functionen von x und y sind; dann werden in dem Ausdrucke

$$u\,dv = u\frac{\partial v}{\partial x}\,dx + u\frac{\partial v}{\partial y}\,dy,$$

welcher in Folge der bekannten Beziehungen

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

in

$$-u\frac{\partial u}{\partial y}\,dx + u\frac{\partial u}{\partial x}\,dy$$

übergeht, die Coefficienten von dx und dy nämlich

$$-u\frac{\partial u}{\partial y}, \quad u\frac{\partial u}{\partial x}$$

auf der ganzen Riemann'schen Fläche endlich und eindeutig sein, weil das Integral erster Gattung $u + vi$ es ist, ausgenommen in den Verzweigungspunkten von $\sqrt{R(z)}$, da

$$\frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial(u+iv)}{\partial x} = \frac{d(u+iv)}{dz} = \frac{C_0 + C_1 z + C_2 z^2 + \cdots + C_{p-1} z^{p-1}}{\sqrt{R(z)}}$$

oder

$$\frac{\partial u}{\partial x} - i\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{C_0 + C_1 z + C_2 z^2 + \cdots + C_{p-1} z^{p-1}}{\sqrt{R(z)}}$$

ist, welcher Ausdruck für $z = \alpha_1, \alpha_2, \dots \alpha_{2p+1}$ unendlich gross werden kann. Wollen wir daher die vorgelegte Riemann'sche Fläche zu einem vollständig begränzten Raume machen, innerhalb dessen sich für die Functionen $u\frac{\partial u}{\partial x}$, $u\frac{\partial u}{\partial y}$ keine Discontinuitätspunkte befinden, so werden wir nur die Verzweigungspunkte durch unendlich kleine doppeltgewundene Kreise auszuschliessen brauchen, und es wird dann nach dem bekannten durch die Gleichung

$$\int (Pdx + Qdy) = \iint \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx\, dy$$

dargestellten Satze

$$\text{(m)} \qquad \int u\, dv = \int \left(-u\frac{\partial u}{\partial y}\, dx + u\frac{\partial u}{\partial x}\, dy\right) = \iint \left\{\frac{\partial}{\partial x}\left(u\frac{\partial u}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(u\frac{\partial u}{\partial y}\right)\right\} dx\, dy$$
$$= \iint u\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) dx\, dy + \iint \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2\right] dx\, dy$$

sein, worin das einfache Integral $\int u\, dv$ über die gesammte Begränzung der vollständig begränzten Fläche in der bekannten Richtung genommen, und die rechts stehenden Doppelintegrale über den Inhalt dieser Fläche auszudehnen sind. Nun ist aber leicht einzusehen, dass

$$\int u\, dv$$

über die Begränzung eines um einen Verzweigungspunkt beschriebenen Doppelkreises ausgedehnt, den Werth Null annehmen muss. Denn sei α der Verzweigungspunkt, und werde der auch in diesem Punkte endliche Werth von u mit u_α bezeichnet, so wird, wenn der Werth von u für die Peripheriepunkte dieses unendlich kleinen Doppelkreises durch $u_\alpha + \varepsilon(x, y)$ dargestellt wird, wo $\varepsilon(x, y)$ für alle in Betracht kommenden Punkte unendlich klein ist,

$$\int_{(\alpha)} u\ dv = u_\alpha \int_{(\alpha)} dv + \int_{(\alpha)} \varepsilon(x, y)\ dv,$$

und da

$$\int_{(\alpha)} du + i\int_{(\alpha)} dv = \int_{(\alpha)} \frac{C_0 + C_1 z + C_2 z^2 + \cdots + C_{p-1} z^{p-1}}{\sqrt{R(z)}}\ dz = 0$$

ist,

$$\int_{(\alpha)} du = \int_{(\alpha)} dv = 0$$

sein, und sich somit zuerst

$$\int_{(\alpha)} u\, dv = \int_{(\alpha)} \varepsilon(x, y)\ dv$$

ergeben; daraus folgt aber

$$\begin{aligned}\operatorname{mod} \int_{(\alpha)} u\,dv = \operatorname{mod} \int_{(\alpha)} \varepsilon(x,y)\,dv \leqq \int_{(\alpha)} \operatorname{mod} \varepsilon(x,y) \operatorname{mod} dv \\ \leqq \int_{(\alpha)} \operatorname{mod} \varepsilon(x,y) \operatorname{mod} \frac{C_0 + C_1 z + C_2 z^2 + \cdots + C_{p-1} z^{p-1}}{\sqrt{R(z)}}\, dz,\end{aligned}$$

weil

$$\operatorname{mod} dv \leqq \sqrt{du^2 + dv^2} \leqq \operatorname{mod} \frac{C_0 + C_1 z + C_2 z^2 + \cdots + C_{p-1} z^{p-1}}{\sqrt{R(z)}}\, dz$$

ist, und daher, wenn mit ds das Bogenelement des unendlich kleinen Doppelkreises, mit r der unendlich kleine Radius bezeichnet, und

$$\operatorname{mod} \sqrt{R(z)} = \operatorname{mod} \sqrt{z-\alpha} \operatorname{mod} \sqrt{\frac{R(z)}{z-\alpha}} = r^{\frac{1}{2}} f(x,y),$$
$$\operatorname{mod} \left(C_0 + C_1 z + C_2 z^2 + \cdots + C_{p-1} z^{p-1}\right) = F(x,y)$$

gesetzt wird, worin $f(x,y)$ für die Peripheriepunkte jenes Kreises endlich und von Null verschieden, $F(x,y)$ endlich ist,

$$\operatorname{mod} \int_{(\alpha)} u\,dv \leqq \int_{(\alpha)} \operatorname{mod} \varepsilon(x,y) \frac{F(x,y)ds}{r^{\frac{1}{2}} f(x,y)} \leqq \int_{(\alpha)} \operatorname{mod} \varepsilon(x,y) \frac{F(x,y) r^{\frac{1}{2}} d\varphi}{f(x,y)},$$

wenn φ den Centriwinkel des Kreises bedeutet, oder endlich:

$$\operatorname{mod} \int_{(\alpha)} u\,dv \leqq r^{\frac{1}{2}} \int_{(\alpha)} \operatorname{mod} \varepsilon(x,y) \frac{F(x,y)d\varphi}{f(x,y)} = 0.$$

Daraus folgt nun aber, dass in der Gleichung (m) das Integral $\int u\,dv$ nur über die beiden Seiten der Querschnitte $a_1, a_2, \dots a_p$, $b_1, b_2, \dots b_p$, $c_1, c_2, \dots c_{p-1}$ der Riemann'schen Fläche wird ausgedehnt zu werden brauchen. Beachtet man ferner, dass für alle Punkte des umgränzten Raumes bekanntlich

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

ist, so folgt, weil das Integral

$$\iint \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2\right] dx\,dy$$

vermöge der positiven Werthe der einzelnen Elemente selbst positiv ist, dass

$$\int u\,dv_1$$

über jene Begränzung der einfach zusammenhängenden Fläche genommen, wesentlich positiv sein wird, wobei die Umkreisung so stattfinden muss, dass man während der Bewegung die Fläche zur Linken hat. Bezeichnet man nun der Unterscheidung halber die innere Seite der Querschnitte mit a_ν^-, b_ν^-, die äussere Seite derselben mit a_ν^+, b_ν^+, so wird das Integral, wenn als Integrationsrichtungen die in der Figur 2. durch die Pfeile angezeigten genommen werden,

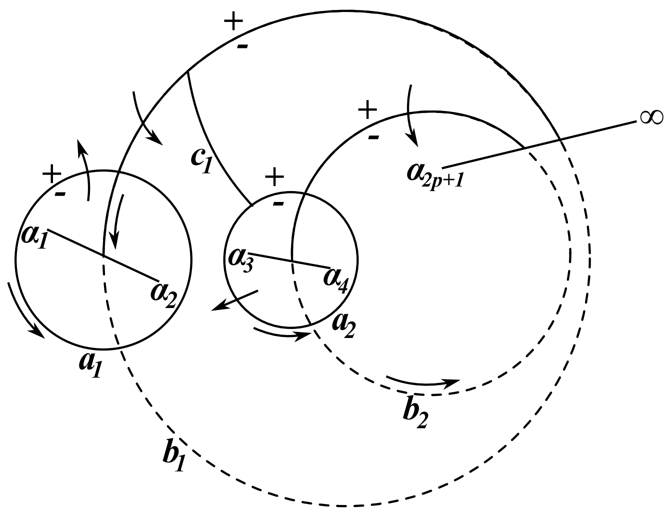
$$\int_{a_1^+} u\,dv - \int_{a_1^-} u\,dv + \int_{b_1^+} u\,dv - \int_{b_1^-} u\,dv + \int_{a_2^+} u\,dv - \int_{a_2^-} u\,dv + \int_{b_2^+} u\,dv - \int_{b_2^-} u\,dv + \cdots,$$

da jeder Querschnitt auf beiden Seiten und in entgegengesetzter Richtung durchlaufen wird, und u als reeller Theil des Integrales erster Gattung ebenso wie dv zu beiden Seiten der Querschnitte c, für welche der Periodicitätsmodul Null war, denselben Werth haben, oder auch

$$\int_{a_1} (u^+ - u^-)\,dv + \int_{b_1} (u^+ - u^-)\,dv + \int_{a_2} (u^+ - u^-)\,dv + \int_{b_2} (u^+ - u^-)\,dv + \cdots,$$

wenn mit u^+ und u^- die zu a^+ und a^- oder b^+ und b^- gehörigen Werthe der u-Function

Fig. 2.



bezeichnet, die Integrationsrichtungen im Sinne der in der Figur angegebenen Pfeile genommen werden, und endlich berücksichtigt wird, dass dv zu beiden Seiten desselben Querschnittes wegen des constanten Stetigkeitssprunges des Integrales erster Gattung, dessen rein imaginärer Theil die Grösse iv ist, denselben Werth hat.

Wird nun der Periodicitätsmodul des Integrals erster Gattung an dem Querschnitt a_ν mit

$$A_\nu = \alpha_\nu + \gamma_\nu i,$$

an dem Querschnitte b_ν mit

$$B_\nu = \beta_\nu + \delta_\nu i,$$

bezeichnet, so wird an dem Querschnitte a_ν resp. b_ν

$$u^+ - u^- = \alpha_\nu, \quad u^+ - u^- = -\beta_\nu$$

sein, und daraus

$$\int u\,dv = \sum_{\nu=1}^{p} \left\{ \alpha_\nu \int_{a_\nu} dv - \beta_\nu \int_{b_\nu} dv \right\}$$

folgen, worin die Integrationsrichtungen die durch die Pfeile angezeigten sind. Da aber dv der rein imaginäre Theil des Differentials

$$\frac{\left(C_0 + C_1 z + \cdots + C_{p-1} z^{p-1}\right) dz}{\sqrt{R(z)}}$$

ist, so werden die geschlossenen Integrale über dv längs den Curven a_ν und b_ν genommen, die rein imaginären Theile der Periodicitätsmoduln an den resp. Querschnitten liefern, und daher

$$\int_{a_\nu} dv = \delta_\nu, \quad \int_{b_\nu} dv = \gamma_\nu$$

sein, so dass

$$\int u\,dv = \sum_{\nu=1}^{p} (\alpha_\nu \delta_\nu - \beta_\nu \gamma_\nu),$$

und daher nach dem früher gefundenen Resultate

$$\sum_{\nu=1}^{p} (\alpha_\nu \delta_\nu - \beta_\nu \gamma_\nu) > 0$$

ist. Somit ist der oben ausgesprochene Satz bewiesen.

Wir wollen am Schlusse dieser Vorlesung noch die wirkliche Darstellung der Perioden eines hyperelliptischen Integrales in Form von Integralen geben, die zwischen den Verzweigungspunkten der Riemann'schen Fläche von $\sqrt{R(z)}$ ausgedehnt sind.

Sei das Integral

$$J = \int f\left(z, \sqrt{R(z)}\right) dz$$

gegeben, welches auf festbestimmten Blättern in den Punkten

$$z_1, z_2, \cdots z_m$$

und in den Verzweigungspunkten

$$\alpha_1, \alpha_2, \cdots \alpha_{2p+1}, \infty$$

unendlich werden soll, wie die Functionen:

$$A_1 \log(z-z_1) + B_1(z-z_1)^{-1} + C_1(z-z_1)^{-2} + \cdots + K_1(z-z_1)^{-k_1},$$
$$A_2 \log(z-z_2) + B_2(z-z_2)^{-1} + C_2(z-z_2)^{-2} + \cdots + K_2(z-z_2)^{-k_2},$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$A_m \log(z-z_m) + B_m(z-z_m)^{-1} + C_m(z-z_m)^{-2} + \cdots + K_m(z-z_m)^{-k_m},$$

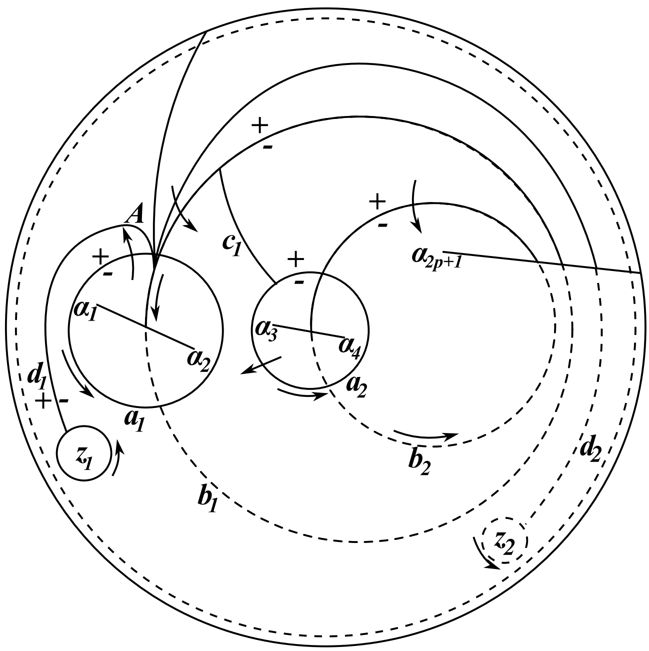
$$a_1 \log(z-\alpha_1)^{\frac{1}{2}} + b_1(z-\alpha_1)^{-\frac{1}{2}} + \ldots\ldots\ldots\ldots + h_1(z-\alpha_1)^{-\frac{\lambda_1}{2}},$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$a_{2p+1} \log(z-\alpha_{2p+1})^{\frac{1}{2}} + b_{2p+1}(z-\alpha_{2p+1})^{-\frac{1}{2}} + \cdots + h_{2p+1}(z-\alpha_{2p+1})^{-\frac{\lambda_{2p+1}}{2}},$$
$$M_0 \log z^{\frac{1}{2}} + M_1 z^{\frac{1}{2}} + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + M_\delta z^{\frac{\delta}{2}},$$

so werden wir in der durch Ziehen der Querschnitte

$$a_1, a_2, \cdots a_p, \quad b_1, b_2, \cdots b_p, \quad c_1, c_2, \cdots c_{p-1}$$

einfach zusammenhängend gewordenen Fläche die Unstetigkeitspunkte durch unendlich kleine geschlossene Kreise auszuschliessen haben, und um die nunmehr wieder mehrfach zusammenhängende Fläche einfach zusammenhängend zu machen, je einen Punkt dieser Kreise, wie es die Figur 3. angiebt,*) aus schon oben angegebenen Gründen mit demselben Punkte, der hier der Schnittpunkt A des a_1- und b_1-Querschnittes sein mag, durch neue Querschnitte $d_1, d_2, \ldots$ verbinden müssen.

Fig. 3.



Was vor Allem die an den Querschnitten $d_1, d_2, \ldots$ stattfindenden Stetigkeitssprünge betrifft, so sieht man unmittelbar, und ist schon früher hervorgehoben worden, dass

*) Wir wählen in der Zeichnung einige Unstetigkeitspunkte im ersten, andere im zweiten Blatte.

sie nur von den logarithmischen Gliedern in den Unstetigkeitsfunctionen herrühren, und somit die entsprechenden Periodicitätsmoduln durch

$$2\pi i A_1,\ 2\pi i A_2, \dots 2\pi i A_m,$$
$$2\pi i a_1,\ 2\pi i a_2, \dots 2\pi i a_{2p+1},$$
$$2\pi i M_0$$

dargestellt werden.

Um die Periodicitätsmoduln an den andern Querschnitten zu finden, werde bemerkt, dass für die Aufsuchung dieser die Existenz der eben betrachteten logarithmischen Unstetigkeiten gleichgültig ist, weil das Ueberschreiten aller von diesen herrührenden und in demselben Punkte A zusammenlaufenden Querschnitte den Stetigkeitssprung Null verursacht, und in Folge dessen die Periodicitätsmoduln längs den Querschnitten a und b constant sind, während die an den Querschnitten c, wie schon früher hervorgehoben, verschwinden. Um nun für die letztbezeichneten Periodicitätsmoduln Ausdrücke in Form von bestimmten Integralen zu finden, wird man die a- und b-Querschnitte mehr und mehr um die Verzweigungspunkte herum zusammenziehen, bis die zwischen den einzelnen Verzweigungspunkten sich hinziehenden Theile zu graden Linien werden, so dass die a-Querschnitte zu beiden Seiten des resp. Verzweigungsschnittes auf dem ersten Blatte zu einander parallel laufende Grade liefern, die b-Querschnitte dagegen aus Theilen von graden Linien bestehen, welche sich zwischen den Verzweigungspunkten parallel, aber in den beiden verschiedenen Blättern gelegen hinziehen. Da nun, wie aus der allgemeinen Theorie bekannt, übrigens aus der obigen Figur unmittelbar ersichtlich ist, der Stetigkeitssprung an jedem a- und b-Querschnitte durch das über den zugehörigen b- und a-Querschnitt genommene Integral dargestellt wird, so werden sich, wenn wir die durch die Richtung der Pfeile bezeichneten Sprünge des Integrales J an diesen Querschnitten durch

$$J_{a_k} \quad \text{und} \quad J_{b_k}$$

bezeichnen, ferner die Integrationen ebenfalls in der durch die beistehenden Pfeile angezeigten Richtung ausführen und beachten, dass für die über die b-Querschnitte ausgeführten Integrationen die längs den Verzweigungsschnitten in entgegengesetzten Richtungen verlaufenden Integrale sich aufheben, unmittelbar die Beziehungen ergeben:

$$J_{a_k} = -2\int_{\alpha_{2k}}^{\alpha_{2k+1}} dJ - 2\int_{\alpha_{2k+2}}^{\alpha_{2k+3}} dJ - \cdots - 2\int_{\alpha_{2p}}^{\alpha_{2p+1}} dJ,$$
$$J_{b_k} = -2\int_{\alpha_{2k-1}}^{\alpha_{2k}} dJ,$$

worin die in J_{a_k} vorkommenden Integrale im oberen Blatte, die in J_{b_k} vorkommenden Integrale auf der oberen Seite (der Figur gemäss) der resp. Verzweigungsschnitte ebenfalls im oberen Blatte gradlinig zu nehmen sind.

Daraus ergeben sich für die auf der mehrfach zusammenhängenden Fläche und zwar in der eben angegebenen Weise zwischen je zwei Verzweigungspunkten ausgeführten Integrale die Beziehungen

$$\int_{\alpha_{2k}}^{\alpha_{2k+1}} dJ = \tfrac{1}{2} J_{a_{k+1}} - \tfrac{1}{2} J_{a_k}, \qquad \int_{\alpha_{2k-1}}^{\alpha_{2k}} dJ = -\tfrac{1}{2} J_{b_k};$$

wenn man nun alle Verzweigungspunkte mit einer im oberen Blatte gelegenen geschlossenen Linie umgiebt, und der Einfachheit wegen annimmt, dass das hyperelliptische Integral keine Unstetigkeitspunkte besitzen, somit ein Integral erster Gattung sein soll, so wird dieses Integral den Werth Null liefern, und wenn man andererseits berücksichtigt, dass nach Zusammenziehung aller Querschnitte in der oben angegebenen Weise auch diese geschlossene Linie bis zu jenen Querschnitten hin in eine gebrochene Grade zusammengezogen werden kann, so ergiebt sich die Integralbeziehung

$$\int_{\alpha_1}^{\alpha_2} dJ + \int_{\alpha_3}^{\alpha_4} dJ + \cdots + \int_{\alpha_{2p-1}}^{\alpha_{2p}} dJ + \int_{\alpha_{2p+1}}^{\infty} dJ = 0,$$

in welcher die einzelnen Integrale auf der oberen Seite der Verzweigungsschnitte im oberen Blatte gradlinig zu nehmen sind, und wir erhalten somit für das Integral zwischen den Verzweigungspunkten α_{2p+1} und ∞ unter der gemachten Voraussetzung den Ausdruck:

$$\int_{\alpha_{2p+1}}^{\infty} dJ = \tfrac{1}{2} J_{b_1} + \tfrac{1}{2} J_{b_2} + \cdots + \tfrac{1}{2} J_{b_p}.$$

Endlich sollen noch die Periodicitätsmoduln durch die auf der einfach zusammenhängenden Riemann'schen Fläche F' zwischen den Verzweigungspunkten verlaufenden Integrale dargestellt werden, wobei wir der Einfachheit wegen annehmen, dass das Integral gar keine logarithmischen Unstetigkeiten besitzt, d. h. dass andere Querschnitte als die a-, b-, c-Linien nicht vorkommen — ich bemerke jedoch, dass diese Beschränkung nur der Gleichförmigkeit der Ausdrücke wegen gemacht wird, indem ohne dieselbe zu jedem Ausdrucke nur noch so viel mit den Coefficienten der logarithmischen Unstetigkeitsfunctionen versehene Multipla von $2\pi i$ hinzukommen, als von diesen herrührende Querschnitte durch den Integrationsweg geschnitten werden.

Dann ist aber leicht zu sehen, dass man mit Rücksicht darauf, dass sich die gradlinigen Integrale von den auf der einfach zusammenhängenden Fläche genommenen nur um die Stetigkeitssprünge unterscheiden, welche durch Schneiden der Graden und der Querschnitte entstehen, die Beziehungen erhält:

$$\int\limits_{\alpha_{2k-1}}^{\alpha_{2k}}\!\!{}_{F'} dJ = \int_{\alpha_{2k-1}}^{\alpha_{2k}} dJ + J_{b_k} = \tfrac{1}{2} J_{b_k},$$

$$\int_{F'}\limits_{\alpha_{2k}}^{\alpha_{2k+1}} dJ = \int_{\alpha_{2k}}^{\alpha_{2k+1}} dJ + J_{a_k} - J_{a_{k+1}} = \tfrac{1}{2} J_{a_k} - \tfrac{1}{2} J_{a_{k+1}},$$

$$\int_{F'}\limits_{\alpha_{2p}}^{\alpha_{2p+1}} dJ = \int_{\alpha_{2p}}^{\alpha_{2p+1}} dJ + J_{a_p} = \tfrac{1}{2} J_{a_p},$$

und unter der oben gemachten Beschränkung:

$$\int_{F'}\limits_{\alpha_{2p+1}}^{\infty} dJ = \int_{\alpha_{2p+1}}^{\infty} dJ - J_{b_1} - J_{b_2} - \cdots - J_{b_p} = -\tfrac{1}{2} J_{b_1} - \tfrac{1}{2} J_{b_2} - \cdots - \tfrac{1}{2} J_{b_p},$$

wobei die durch

$$\int_{F'}$$

bezeichneten Integrale auf der einfach zusammenhängenden Fläche F' zu nehmen sind; die hieraus für die Periodicitätsmoduln entspringenden Ausdrücke durch die zwischen den Verzweigungspunkten sich erstreckenden Integrale lauten demnach:

$$J_{a_k} = 2 \int_{F'}\limits_{\alpha_{2k}}^{\alpha_{2k+1}} dJ + 2 \int_{F'}\limits_{\alpha_{2k+2}}^{\alpha_{2k+3}} dJ + \cdots + 2 \int_{F'}\limits_{\alpha_{2p}}^{\alpha_{2p+1}} dJ,$$

$$J_{b_k} = 2 \int_{F'}\limits_{\alpha_{2k-1}}^{\alpha_{2k}} dJ.$$

Vierte Vorlesung.

Reduction des allgemeinen hyperelliptischen Integrales auf drei Arten von Normalintegralen.

Wenn man auch nach dem Vorigen im Stande ist, ein Integral

$$\int F\bigl(z, \sqrt{R(z)}\,\bigr)\, dz,$$

in welchem F eine beliebige rationale Function bedeutet, dadurch, dass man die Punkte aufsucht, in denen $F\bigl(z, \sqrt{R(z)}\bigr)$ unendlich gross wird, und diese Function in der Nähe dieser Punkte entwickelt, um die Art des Unendlichwerdens derselben kennen zu lernen, aus den oben definirten Integralen der verschiedenen drei Gattungen und deren nach den singulären Punkten genommenen Differentialquotienten zusammenzusetzen, so wird es doch für das Folgende wesentlich sein, drei feste Klassen von Normalintegralen aufzustellen, auf welche sich jedes hyperelliptische Integral mit Hülfe der in der Function F vorkommenden Constanten zurückführen lässt.

Sei

$$R(z) = A(z - \alpha_1)(z - \alpha_2) \cdots (z - \alpha_{2p+1}),$$

und $F\bigl(z, \sqrt{R(z)}\,\bigr)$ eine rationale Function von z und $\sqrt{R(z)}$, so wird sich

$$\int F\bigl(z, \sqrt{R(z)}\,\bigr)\, dz = \int \frac{\varphi_1(z) + \varphi_2(z)\sqrt{R(z)}}{\psi_1(z) + \psi_2(z)\sqrt{R(z)}}\, dz,$$

worin

$$\varphi_1(z),\ \ \varphi_2(z),\ \ \psi_1(z),\ \ \psi_2(z)$$

ganze Functionen von z sind, wenn in der Function unter dem Integral Zähler und Nenner mit dem conjugirten Werthe des Nenners multiplicirt wird, in die Form bringen lassen

$$\int \Bigl[F_1(z) + F_2(z)\sqrt{R(z)}\Bigr]\, dz = \int F_1(z)\, dz + \int \frac{F(z)\, dz}{\sqrt{R(z)}},$$

in welcher $F_1(z)$, $F_2(z)$, $F(z)$ rationale Functionen von z bedeuten. Da nun

$$\int F_1(z)\, dz$$

als Integral einer rationalen Function von z eine algebraisch-logarithmische Function ist, so handelt es sich somit nur noch um ein Integral von der Form

$$\int \frac{F(z)\,dz}{\sqrt{R(z)}},$$

auf dessen Reduction wir nunmehr eingehen.

Nach dem Cauchy'schen Satze ist, wenn $F(z)$ für die Werthe

$$z_1,\ z_2,\ \cdots\ z_n$$

unendlich wird,

$$(1)\quad F(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{(z_1)} \frac{F(t)}{z-t}dt + \frac{1}{2\pi i}\int_{(z_2)} \frac{F(t)}{z-t}dt + \cdots + \frac{1}{2\pi i}\int_{(z_n)} \frac{F(t)}{z-t}dt - \frac{1}{2\pi i}\int_{(\infty)} \frac{F(t)}{z-t}dt,$$

worin die Integrale so zu durchlaufen sind, dass die eingeschlossenen Flächen zur Linken liegen, und das letzte Integral längs einem den Nullpunkt umschliessenden Kreise mit sehr grossem Radius genommen werden kann; es wird sich somit, da die geschlossenen Integrale um die Punkte z_α genommen, wie bekannt, die Coefficienten von $(t - z_\alpha)^{-1}$ in der Entwickelung von

$$\frac{F(t)}{z-t}$$

nach steigenden Potenzen von $(t - z_\alpha)$ darstellen, und ebenso das um den unendlich entfernten Punkt genommene Integral den Coefficienten von t^{-1} in der Entwickelung derselben Function nach fallenden Potenzen von t liefert, wenn wir diese Coefficienten durch

$$\left[\frac{F(t)}{z-t}\right]_{(z-t_\alpha)^{-1}} \quad \text{und} \quad \left[\frac{F(t)}{z-t}\right]_{t^{-1}}$$

bezeichnen und die Gleichung (1) mit $\sqrt{R(z)}$ dividiren, der Ausdruck ergeben

$$(2)\quad \frac{F(z)}{\sqrt{R(z)}} = \left[\frac{F(t)}{(z-t)\sqrt{R(z)}}\right]_{(t-z_1)^{-1}} + \cdots + \left[\frac{F(t)}{(z-t)\sqrt{R(z)}}\right]_{(t-z_n)^{-1}} - \left[\frac{F(t)}{(z-t)\sqrt{R(z)}}\right]_{t^{-1}}$$

dessen einzelne Theile nunmehr weiter zu behandeln sein werden.

Nun ist aber eine unmittelbar ersichtliche Identität, die man durch Ausführung der Differentiation verificirt,

$$\frac{d}{dt}\left[\frac{\sqrt{R(t)}}{(z-t)\sqrt{R(z)}}\right] - \frac{d}{dz}\left[\frac{\sqrt{R(z)}}{(t-z)\sqrt{R(t)}}\right] = \frac{\frac{1}{2}(z-t)[R'(t)+R'(z)] + [R(t)-R(z)]}{(z-t)^2\sqrt{R(z)}\sqrt{R(t)}},$$

welche, wie man durch einfache Ausrechnung erkennt, wenn

$$\begin{aligned} R(z) &= Az^{2p+1} + B_0 z^{2p} + B_1 z^{2p-1} + \cdots + B_{2p-1} z + B_{2p} \\ F_r(t) &= \frac{2p-2r-1}{2} A t^r + \frac{2p-2r}{2} B_0 t^{r-1} + \frac{2p-2r+1}{2} B_1 t^{r-2} + \cdots \\ &\quad + \frac{2p-r-3}{2} B_{r-3} t^2 + \frac{2p-r-2}{2} B_{r-2} t + \frac{2p-r-1}{2} B_{r-1}, \end{aligned}$$

oder auch

$$\begin{aligned} (-1)^r F_r(t) =& \frac{2p-1}{4p+2} \frac{1}{(2p)!} (2p-1)_r t^r R^{(2p+1)}(t) - \frac{2p-2}{4p} \frac{1}{(2p-1)!} (2p-2)_{r-1} t^{r-1} R^{(2p)}(t) \\ & + \frac{2p-3}{4p-2} \frac{1}{(2p-2)!} (2p-3)_{r-2} t^{r-2} R^{(2p-1)}(t) + \cdots \\ & + (-1)^{r-1} \frac{2p-r}{4p-2r+4} \frac{1}{(2p-r+1)!} (2p-r)_1 t R^{(2p-r+2)}(t) \\ & - (-1)^{r-1} \frac{2p-r-1}{4p-2r+2} \frac{1}{(2p-r)!} R^{(2p-r+1)}(t) \end{aligned}$$

gesetzt wird, worin a_k den k^{ten} Binomialcoefficienten von a und $R^{(i)}(t)$ die i^{te} Ableitung von $R(t)$ bedeutet, in

$$\begin{aligned} \cdots \frac{d}{dt}\left[\frac{\sqrt{R(t)}}{(z-t)\sqrt{R(z)}}\right] = \frac{d}{dz}\left[\frac{\sqrt{R(z)}}{(t-z)\sqrt{R(t)}}\right] + \frac{F_0(t) z^{2p-1}}{\sqrt{R(z)}\sqrt{R(t)}} + \frac{F_1(t) z^{2p-2}}{\sqrt{R(z)}\sqrt{R(t)}} + \cdots \\ + \frac{F_{2p-2}(t) z}{\sqrt{R(z)}\sqrt{R(t)}} + \frac{F_{2p-1}(t)}{\sqrt{R(z)}\sqrt{R(t)}} \end{aligned} \tag{3}$$

übergeht, wobei zu bemerken, dass der Index der F-function den Grad dieser ganzen Function in t bezeichnet.

Integrirt man diese Gleichung nach t zwischen den Gränzen z_α und t, so erhält man

$$\begin{gathered} \frac{\sqrt{R(t)}}{(z-t)\sqrt{R(z)}} - \frac{\sqrt{R(z_\alpha)}}{(z-z_\alpha)\sqrt{R(z)}} = \\ \frac{d}{dz}\left(\sqrt{R(z)} \int_{z_\alpha} \frac{dt}{(t-z)\sqrt{R(t)}}\right) + \frac{z^{2p-1}}{\sqrt{R(z)}} \int_{z_\alpha} \frac{F_0(t)\,dt}{\sqrt{R(t)}} + \frac{z^{2p-2}}{\sqrt{R(z)}} \int_{z_\alpha} \frac{F_1(t)\,dt}{\sqrt{R(t)}} + \cdots \\ + \frac{z}{\sqrt{R(z)}} \int_{z_\alpha} \frac{F_{2p-2}(t)\,dt}{\sqrt{R(t)}} + \frac{1}{\sqrt{R(z)}} \int_{z_\alpha} \frac{F_{2p-1}(t)\,dt}{\sqrt{R(t)}}, \end{gathered}$$

und daher, wenn man mit $\sqrt{R(t)}$ dividirt, mit $F(t)$ multiplicirt, auf beiden Seiten nach steigenden Potenzen von $t - z_\alpha$ entwickelt und die Coefficienten von $(t - z_\alpha)^{-1}$ einander gleichsetzt,

$$
\begin{aligned}
\left[\frac{F(t)}{(z-t)\sqrt{R(z)}}\right]_{(t-z_\alpha)^{-1}} &= \frac{\sqrt{R(z_\alpha)}}{(z-z_\alpha)\sqrt{R(z_\alpha)}}\left[\frac{F(t)}{\sqrt{R(t)}}\right]_{(t-z_\alpha)^{-1}} \\
&+ \frac{z^{2p-1}}{\sqrt{R(z)}}\left[\frac{F(t)}{\sqrt{R(t)}}\int_{z_\alpha}\frac{F_0(t)\,dt}{\sqrt{R(t)}}\right]_{(t-z_\alpha)^{-1}} \\
&+ \frac{z^{2p-2}}{\sqrt{R(z)}}\left[\frac{F(t)}{\sqrt{R(t)}}\int_{z_\alpha}\frac{F(t)\,dt}{\sqrt{R(t)}}\right]_{(t-z_\alpha)^{-1}} \\
&+ \cdots + \frac{1}{\sqrt{R(z)}}\left[\frac{F(t)}{\sqrt{R(t)}}\int_{z_\alpha}\frac{F_{2p-1}(t)\,dt}{\sqrt{R(t)}}\right]_{(t-z_\alpha)^{-1}} \\
&+ \frac{d}{dz}\sqrt{R(z)}\left[\frac{F(t)}{\sqrt{R(t)}}\int_{z_\alpha}\frac{dt}{(t-z)\sqrt{R(t)}}\right]_{(t-z_\alpha)^{-1}},
\end{aligned} \tag{4}
$$

wenn wir uns der oben definirten Bezeichnung bedienen.

Wir gehen wieder zu der Gleichung (3) zurück und integriren nach t für den Anfangswerth $t=\infty$, so ist klar, dass man

$$
\begin{aligned}
\frac{\sqrt{R(t)}}{(z-t)\sqrt{R(z)}} = \frac{d}{dz}\int_\infty \frac{\sqrt{R(z)}}{(t-z)\sqrt{R(t)}}dt + \frac{z^{2p-1}}{\sqrt{R(z)}}\int_\infty \frac{F_0(t)\,dt}{\sqrt{R(t)}} + \cdots \\
+\frac{1}{\sqrt{R(z)}}\int_\infty \frac{F_{2p-1}(t)\,dt}{\sqrt{R(t)}}
\end{aligned} \tag{5}
$$

erhält, wenn man nachweisen kann, dass die Integrationsconstante Null wird; da aber auf der linken Seite in der Umgebung des unendlich entfernten Punktes

$$
\sqrt{R(t)} = A^{\frac{1}{2}}t^{\frac{2p+1}{2}} + a_1 t^{\frac{2p-1}{2}} + \cdots
$$
$$
\frac{1}{z-t} = -\frac{1}{t}\cdot\frac{1}{1-\frac{z}{t}} = -t^{-1} - zt^{-2} - \cdots
$$

ist, so wird die Entwickelung der linken Seite nach fallenden Potenzen von t

$$
\frac{\sqrt{R(t)}}{(z-t)\sqrt{R(z)}} = -\frac{A^{\frac{1}{2}}}{\sqrt{R(z)}}t^{\frac{2p+1}{2}} + \text{ fallende } \textit{gebrochene} \text{ Potenzen von } t;
$$

auf der rechten Seite dagegen wird

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{\sqrt{R(t)}} &= A^{-\frac{1}{2}}t^{-\frac{2p+1}{2}}\left\{1 + a_1 A^{-\frac{1}{2}}t^{-1} + \cdots\right\}^{-1} \\
&= A^{-\frac{1}{2}}t^{-\frac{2p+1}{2}} + b_1 t^{-\frac{2p+3}{2}} + \cdots
\end{aligned}
$$
$$
\frac{1}{t-z} = t^{-1} + zt^{-2} + \cdots,
$$

also

$$\frac{1}{(t-z)\sqrt{R(t)}} = A^{-\frac{1}{2}}t^{-\frac{2p+3}{2}} + c_1 t^{-\frac{2p+5}{2}} + \cdots,$$

und daher

$$\int_\infty \frac{dt}{(t-z)\sqrt{R(t)}} = -\frac{2}{2p+1}A^{-\frac{1}{2}}t^{-\frac{2p+1}{2}} - \frac{2}{2p+3}c_1 t^{-\frac{2p+3}{2}} - \cdots;$$

ferner, da

$$F_r(t) = (p-r-\tfrac{1}{2})At^r + \text{ fallende Potenzen von } t$$

ist,

$$\frac{F_r(t)}{\sqrt{R(t)}} = (p-r-\tfrac{1}{2})A^{-\frac{1}{2}}t^{-\frac{2p+1}{2}+r} + \text{ fallende \textit{gebrochene} Potenzen von } t,$$

und

$$\int_\infty \frac{F_r(t)\,dt}{\sqrt{R(t)}} = -A^{\frac{1}{2}}t^{-\frac{2p-1}{2}+r} + \text{ fallende \textit{gebrochene} Potenzen von } t,$$

so dass die Entwickelung der rechten und linken Seite der obigen Gleichung in der Umgebung des Punktes $t=\infty$ nur gebrochene Potenzen von t enthält, die für $t=\infty$ entweder unendlich gross werden oder verschwinden. Es ist somit die Integrationsconstante Null, und die Gleichung (5) richtig, wenn auf der rechten Seite die Integrale mit der untern Gränze unendlich nur anzeigen sollen, dass die Functionen unter dem Integral in der Umgebung von $z=\infty$ zu entwickeln sind, und aus (5) ergiebt sich wieder ähnlich wie oben

(6)
$$\left[\frac{F(t)}{(z-t)\sqrt{R(z)}}\right]_{t^{-1}} = \frac{z^{2p-1}}{\sqrt{R(z)}}\left[\frac{F(t)}{\sqrt{R(z)}}\int_\infty \frac{F_0(t)\,dt}{\sqrt{R(t)}}\right]_{t^{-1}} + \cdots$$
$$+\frac{1}{\sqrt{R(z)}}\left[\frac{F(t)}{\sqrt{R(t)}}\int_\infty \frac{F_{2p-1}(t)\,dt}{\sqrt{R(t)}}\right]_{t^{-1}} + \frac{d}{dz}\sqrt{R(z)}\left[\frac{F(t)}{\sqrt{R(t)}}\int_\infty \frac{dt}{(t-z)\sqrt{R(t)}}\right]_{t^{-1}}.$$

Es folgt somit aus (4) und (6) durch Einsetzen in (2), wenn

$$\left[\frac{F(t)}{\sqrt{R(t)}}\right]_{(t-z_a)^{-1}} = C_\alpha,$$

$$\left[\frac{F(t)}{\sqrt{R(t)}}\int_{z_\alpha} \frac{F_r(t)\,dt}{\sqrt{R(t)}}\right]_{(t-z_\alpha)^{-1}} = l_a^{(r)}, \quad \left[\frac{F(t)}{\sqrt{R(t)}}\int_\infty \frac{F_r(t)\,dt}{\sqrt{R(t)}}\right]_{t^{-1}} = l_0^{(r)}$$

worin $r=0,1,\dots p-1$,

$$\left[\frac{F(t)}{\sqrt{R(t)}}\int_{z_\alpha} \frac{F_r(t)\,dt}{\sqrt{R(t)}}\right]_{(t-z_\alpha)^{-1}} = k_\alpha^{(r)}, \quad \left[\frac{F(t)}{\sqrt{R(t)}}\int_\infty \frac{F_r(t)\,dt}{\sqrt{R(t)}}\right]_{t^{-1}} = k_0^{(r)}$$

wenn $r = p, p+1, \dots 2p-1$, ferner

$$\left[\frac{F(t)}{\sqrt{R(t)}}\int_{z_\alpha}\frac{dt}{(t-z)\sqrt{R(t)}}\right]_{(t-z_\alpha)^{-1}} = f_\alpha(z), \quad \left[\frac{F(t)}{\sqrt{R(t)}}\int_{\infty}\frac{dt}{(t-z)\sqrt{R(t)}}\right]_{t^{-1}} = f_0(z),$$

endlich

$$\begin{gathered} l_1^{(r)} + l_2^{(r)} + \dots + l_n^{(r)} - l_0^{(r)} = l^{(r)} \\ k_1^{(r)} + k_2^{(r)} + \dots + k_n^{(r)} - k_0^{(r)} = k^{(r)} \\ f_1(z) + f_2(z) + \dots + f_n(z) - f_0(z) = f(z) \end{gathered}$$

gesetzt und mit dz multiplicirt wird, die nachstehende Reduction des allgemeinen hyperelliptischen Differentials:

$$\begin{aligned} \frac{F(z)dz}{\sqrt{R(z)}} =& \frac{C_1\sqrt{R(z_1)}dz}{(z-z_1)\sqrt{R(z)}dz} + \dots + \frac{C_n\sqrt{R(z_n)}dz}{(z-z_n)\sqrt{R(z)}} \\ &+ \frac{l^{(0)}z^{2p-1}dz}{\sqrt{R(z)}} + \frac{l^{(1)}z^{2p-2}dz}{\sqrt{R(z)}} + \dots + \frac{l^{(p-1)}z^{p}dz}{\sqrt{R(z)}} \\ &+ \frac{k^{(p)}z^{p-1}dz}{\sqrt{R(z)}} + \frac{k^{(p+1)}z^{p-2}dz}{\sqrt{R(z)}} + \dots + \frac{k^{(2p-1)}dz}{\sqrt{R(z)}} \\ &+ \frac{d}{dz}\left\{f(z)\sqrt{R(z)}\right\}dz, \end{aligned} \tag{7}$$

so dass sich somit

$$\int\frac{F(z)\,dz}{\sqrt{R(z)}}$$

in eine endliche Anzahl von Integralen von der Form

$$\int\frac{dz}{(z-z_\alpha)\sqrt{R(z)}},$$

in Integrale von der Form

$$\int\frac{z^{2p-1}\,dz}{\sqrt{R(z)}}, \quad \int\frac{z^{2p-2}\,dz}{\sqrt{R(z)}}, \dots \int\frac{z^{p}\,dz}{\sqrt{R(z)}},$$

in solche von der Form

$$\int\frac{z^{p-1}\,dz}{\sqrt{R(z)}}, \quad \int\frac{z^{p-2}\,dz}{\sqrt{R(z)}}, \dots \int\frac{dz}{\sqrt{R(z)}},$$

und in eine Function

$$f(z)\sqrt{R(z)}$$

zerlegt, welche, wie aus der Definition von $f(z)$ hervorgeht, und nachher noch genauer ausgeführt werden soll, das Product einer rationalen Function von z in $\sqrt{R(z)}$ ist.

Das Charakteristische dieser drei Integralklassen ist unmittelbar aus ihrer Form zu erkennen. Es ist bekannt, dass die letzte Integralklasse nur Integrale erster Gattung enthält; für ein Integral der zweiten Klasse, dessen Form

$$\int \frac{z^{p+\alpha}\,dz}{\sqrt{R(z)}}$$

ist, folgt unmittelbar, dass dasselbe für jeden im Endlichen gelegenen Punkt endlich ist, dass aber wegen

$$\frac{1}{\sqrt{R(z)}} = A^{-\frac{1}{2}} z^{-\frac{2p+1}{2}} + bz^{-\frac{2p+3}{2}} + \cdots$$

oder

$$\frac{z^{p+\alpha}}{\sqrt{R(z)}} = A^{-\frac{1}{2}} z^{\alpha-\frac{1}{2}} + bz^{\alpha-\frac{3}{2}} + \cdots$$

oder endlich

$$\int \frac{z^{p+\alpha}\,dz}{\sqrt{R(z)}} = \frac{A^{-\frac{1}{2}}}{\alpha+\frac{1}{2}} z^{\alpha+\frac{1}{2}} + \frac{1}{\alpha-\frac{1}{2}} bz^{\alpha-\frac{1}{2}} + \cdots$$

dieses Integral für $z = \infty$ von der $\alpha + \frac{1}{2}^{\text{ten}}$ Ordnung unendlich wird; da nun $z = \infty$ ein Verzweigungspunkt der zu $\sqrt{R(z)}$ gehörigen Riemann'schen Fläche ist, so wird das Integral in diesem Punkte, wenn $z^{\frac{1}{2}}$ von der ersten Ordnung unendlich gesetzt wird, von der $2\alpha + 1^{\text{ten}}$ Ordnung unendlich oder es stellt ein Integral vor, welches nur für $z = \infty$ und zwar so unendlich wird, dass $2\alpha + 1$ Punkte, für welche es von der ersten Ordnung unendlich ist, dort zusammenfallen. Die ersten Integrale endlich, welche die Form haben

$$\int \frac{dz}{(z-z_\alpha)\sqrt{R(z)}},$$

werden nur in $z = z_\alpha$ und dort logarithmisch unendlich und zwar auf beiden Blättern, sind also, indem die beiden Punkte z_1 und z_2 eines allgemeinen Integrales dritter Gattung hier in übereinander liegende Punkte verschiedener Blätter fallen, Integrale dritter Gattung; nur wenn z_α eine der Lösungen $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_{2p+1}$ des Polynoms $R(z)$ ist, würde es, wie unmittelbar zu sehen, ein Integral zweiter Gattung sein, dann aber, wie später gezeigt wird, in der Reduction gar nicht vorkommen.

Wir wollen noch kurz einige Betrachtungen in Betreff der Coefficienten der oben gefundenen Reductionsformel anstellen. Was zuerst den Werth von

$$C = \left[\frac{F(t)}{\sqrt{R(t)}}\right]_{(t-z_\alpha)^{-1}}$$

betrifft, so wird, wenn z_α nicht eine der Lösungen von $R(t)=0$ ist,

$$\frac{1}{\sqrt{R(t)}} = R(z_\alpha)^{-\frac{1}{2}} + b_1(t-z_\alpha) + \cdots$$

sein, und da, wenn $F(z)$ in $z=z_\alpha$ von der m^{ten} Ordnung unendlich wird,

$$F(t) = c_{-m}(t-z_\alpha)^{-m} + c_{-m+1}(t-z_\alpha)^{-m+1} + \cdots$$

ist, so werden zur Bestimmung der obigen Grösse C_α nur diese beiden Reihen zu multipliciren sein, und zwar wird man von der ersten nur die ersten m Glieder zu kennen brauchen, um den zugehörigen Werth von C_α herzuleiten, der im Allgemeinen von Null verschieden sein wird. *Ist dagegen* $z_\alpha = \alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_{2p+1}$, dann wird

$$\frac{1}{\sqrt{R(t)}} = A^{-\frac{1}{2}}(t-z_\alpha)^{-\frac{1}{2}} + b_1(t-z_\alpha)^{\frac{1}{2}} + \cdots,$$

und daher wird das Product dieser Reihe mit der Reihenentwicklung von $F(t)$ nur gebrochene Exponenten enthalten, *also* $C_\alpha = 0$ *sein, und sich somit kein dem Discontinuitätspunkte* z_α *entsprechendes Integral dritter Gattung ergeben.*

Der durch die Gleichung

$$k_\alpha^{(r)} = \left[\frac{F(t)}{\sqrt{R(t)}} \int_{z_\alpha} \frac{F_r(t)\,dt}{\sqrt{R(t)}}\right]_{(t-z_\alpha)^{-1}},$$

worin $r = p, p+1, \ldots 2p-1$ zu setzen ist, gegebene Werth von k_α wird, wenn wir z_α wieder von $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_{2p+1}$ verschieden annehmen, da

$$\frac{1}{\sqrt{R(t)}} = R(z_\alpha)^{-\frac{1}{2}} + a_1(t-z_\alpha) + \cdots$$

$$F_r(t) = F_r(z_\alpha) + \frac{t-z_\alpha}{1} F_r'(z_\alpha) + \cdots + \frac{(t-z_\alpha)^r}{r!} F_r^{(r)}(z_\alpha),$$

also

$$\int_{z_\alpha} \frac{F_r(t)\,dt}{\sqrt{R(t)}} = F_r(z_\alpha) R(z_\alpha)^{-\frac{1}{2}}(t-z_\alpha) + \cdots,$$

ausserdem

$$\frac{F(t)}{\sqrt{R(t)}} = R(z_\alpha)^{-\frac{1}{2}} c_{-m}(t-z_\alpha)^{-m} + \cdots,$$

und daher

$$\frac{F(t)}{\sqrt{R(t)}} \int_{z_\alpha} \frac{F_r(t)\,dt}{\sqrt{R(t)}}$$
$$= c_{-m} R(z_\alpha)^{-1} F_r(z_\alpha)(t-z_\alpha)^{-m+1} + \text{steigende ganze Potenzen von } t - z_\alpha$$

ist, *im Allgemeinen nur dann verschwinden, wenn* $m = 1$ *ist*, weil dann die Reihenentwicklung bereits mit der nullten Potenz beginnt; ist $z_\alpha = \alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_{2p+1}$, so überzeugt man sich leicht mit Hülfe der vorher gemachten Entwicklung, dass in diesem Falle k_α im Allgemeinen nicht verschwindet; *in allen Fällen ist* $k_\alpha^{(r)}$ *eine rationale Function von* z_α, *wie aus den Reihenentwicklungen unmittelbar hervorgeht.*

Was nun die Grösse

$$k_0^{(r)} = \left[\frac{F(t)}{\sqrt{R(t)}} \int_\infty \frac{F_r(t)\,dt}{\sqrt{R(t)}}\right]_{t^{-1}}$$

angeht, so ist

$$\frac{1}{\sqrt{R(t)}} = A^{-\frac{1}{2}} t^{-\frac{2p+1}{2}} + b_1 t^{-\frac{2p+3}{2}} + \cdots$$

$$F_r(t) = (p - r - \tfrac{1}{2}) A t^r + \cdots\,,$$

somit

$$\frac{F_r(t)}{\sqrt{R(t)}} = (p - r - \tfrac{1}{2}) A^{-\frac{1}{2}} t^{r-\frac{2p+1}{2}} + \cdots\,,$$

und daher

$$\int_\infty \frac{F_r(t)\,dt}{\sqrt{R(t)}} = -A^{-\frac{1}{2}} t^{\frac{2r-2p+1}{2}} + \cdots\,,$$

ist nun μ der Grad des Zählers und ν der Grad des Nenners der rationalen Function $F(t)$, so wird

$$F(t) = \frac{a_0 t^\mu (1 + c_1 t^{-1} + \cdots)}{b_0 t^\nu (1 + d_1 t^{-1} + \cdots)} = \frac{a_0}{b_0} t^{\mu-\nu} (1 + e_1 t^{-1} + \cdots),$$

also

$$\frac{F(t)}{\sqrt{R(t)}} = \frac{a_0}{b_0} A^{-\frac{1}{2}} t^{\mu-\nu-\frac{2p+1}{2}} + \text{ fallende Potenzen von } t,$$

so dass

$$\frac{F(t)}{\sqrt{R(t)}} \int_\infty \frac{F_r(t)\,dt}{\sqrt{R(t)}} = -\frac{a_0}{b_0} A^{-1} t^{\mu-\nu+r-2p} + \text{ fallende Potenzen von } t,$$

und *es wird somit* $k_0^{(r)} = 0$ *sein, wenn*

$$\mu - \nu + r - 2p < -1$$

oder

$$\mu - \nu < 2p - r - 1$$

ist, d. h.

$$\begin{array}{ll} \text{für } r = \; p & \mu - \nu < p - 1 \\ \text{für } r = \; p + 1 & \mu - \nu < p - 2 \\ \dots\dots\dots\dots & \\ \text{für } r = 2p - 1 & \mu - \nu < 0 \end{array}$$

ist, und daher folgt, weil

$$k_1^{(r)} + k_2^{(r)} + \cdots + k_n^{(r)} - k_0^{(r)} = k^{(r)}$$

ist, *dass*

$$\int \frac{F(z)\,dz}{\sqrt{R(z)}}$$

in seiner in Einzelintegrale der verschiedenen Gattungen aufgelösten Form gar kein Integral erster Gattung hat, wenn $F(z)$ *für keine Wurzel von* $R(z)$ *unendlich wird, in seinen Discontinuitätspunkten von der ersten Ordnung unendlich gross und zu gleicher Zeit echt gebrochen ist.*

Für $l_\alpha^{(r)}$ bleibt genau das für $k_\alpha^{(r)}$ entwickelte, wie man sich durch Wiederholung der vorher gemachten Schlüsse überzeugen kann, bestehen, nur für

$$l_0^{(r)} = \left[\frac{F(t)}{\sqrt{R(t)}} \int_\infty \frac{F_r(t)\,dt}{\sqrt{R(t)}}\right]_{t^{-1}},$$

worin $r = 0, 1, 2, \dots p - 1$ zu setzen ist, folgt, da, wie früher,

$$\frac{F(t)}{\sqrt{R(t)}} \int \frac{F_r(t)\,dt}{\sqrt{R(t)}} = -\frac{a_0}{b_0} A^{-1} t^{\mu-\nu+r-2p} + \text{ fallende Potenzen von } t,$$

dass $l_0^{(r)} = 0$ *sein wird, wenn*

$$\mu - \nu + r - 2p < -1$$

oder

$$\mu - \nu < 2p - r - 1$$

ist, d. h.

$$\begin{array}{ll} \text{für } r = 0 & \mu - \nu < 2p - 1 \\ \text{für } r = 1 & \mu - \nu < 2p - 2 \\ \dots\dots\dots\dots & \\ \text{für } r = p - 1 & \mu - \nu < p \end{array}$$

ist, *und es wird somit in der Reductionsformel des hyperelliptischen Integrals ein Normalintegral zweiter Gattung — wie wir jetzt die in der Reductionsformel vorkommenden, im unendlich entfernten Punkte von einer endlichen Ordnung unendlichen Integrale nennen wollen — überhaupt nicht vorkommen, wenn $F(z)$ für keine Lösung von $R(z)$ unendlich wird, für seine Discontinuitätspunkte von der ersten Ordnung unendlich gross und der Grad des Zählers kleiner ist als der um p Einheiten vermehrte Grad des Nenners, d. h. wenn der Grad des Zählers den des Nenners nicht mindestens um p Einheiten übersteigt.*

Betrachten wir endlich noch

$$f_\alpha(z) = \left[\frac{F(t)}{\sqrt{R(t)}} \int_{z_\alpha} \frac{dt}{(t-z)\sqrt{R(t)}}\right]_{(t-z_\alpha)^{-1}},$$

so wird die Berechnung dieser Grösse in der folgenden Weise anzustellen sein:

$$\frac{1}{\sqrt{R(t)}} = R(z_\alpha)^{-\frac{1}{2}} + a_1(t-z_\alpha) + \cdots$$

$$\begin{aligned}\frac{1}{t-z} &= -\frac{1}{z-z_\alpha-(t-z_\alpha)} = -\frac{1}{z-z_\alpha}\frac{1}{1-\frac{t-z_\alpha}{z-z_\alpha}}\\ &= -\frac{1}{z-z_\alpha} - \frac{t-z_\alpha}{(z-z_\alpha)^2} + \cdots,\end{aligned}$$

somit

$$\int_{z_\alpha} \frac{dt}{(t-z)\sqrt{R(t)}} = -\frac{R(z_\alpha)^{-\frac{1}{2}}}{z-z_\alpha}(t-z_\alpha) + \cdots;$$

da ferner

$$\frac{F(t)}{\sqrt{R(t)}} = R(z_\alpha)^{-\frac{1}{2}} c_{-m}(t-z_\alpha)^{-m} + \cdots$$

ist, so folgt

$$\frac{F(t)}{\sqrt{R(t)}} \int_{z_\alpha} \frac{dt}{(t-z)\sqrt{R(t)}} = -\frac{R(z_\alpha)^{-1}}{z-z_\alpha} c_{-m}(t-z_\alpha)^{-m+1} + \cdots,$$

so dass $f_\alpha(z)$ jedenfalls, da alle Entwicklungscoefficienten von $\dfrac{1}{\sqrt{R(t)}}$, wie man unmittelbar sieht, dieselbe Irrationalität $R(z_\alpha)^{-\frac{1}{2}}$ enthalten, *eine rationale Function von z und z_α wird*, und *verschwindet, wenn $-m+1 \geqq 0$, also $F(z)$ in z_α von der ersten Ordnung unendlich wird.* Das Letztere tritt wieder, wie man sich auf dem schon angegebenen Wege überzeugen kann, nicht ein, wenn $z_\alpha = \alpha_1, \alpha_2 \cdots \alpha_{2p+1}$ ist. Die Entwicklung von

$$f_0(z) = \left[\frac{F(t)}{\sqrt{R(t)}} \int_\infty \frac{dt}{(t-z)\sqrt{R(t)}}\right]_{t^{-1}}$$

endlich liefert

$$\frac{1}{\sqrt{R(t)}} = A^{-\frac{1}{2}} t^{-\frac{2p+1}{2}} + \cdots$$
$$\frac{1}{t-z} = \frac{1}{t} \frac{1}{1-\frac{z}{t}} = t^{-1} + zt^{-2} + \cdots$$

und daher

$$\int_\infty \frac{dt}{(t-z)\sqrt{R(t)}} = -\frac{2}{2p+1} A^{-\frac{1}{2}} t^{-\frac{2p+1}{2}} + \cdots;$$

da aber

$$\frac{F(t)}{\sqrt{R(t)}} = \frac{a_0}{b_0} A^{-\frac{1}{2}} t^{\mu-\nu-\frac{2p+1}{2}} + \text{ fallende Potenzen von } t,$$

so folgt

$$\frac{F(t)}{\sqrt{R(t)}} \int_\infty \frac{dt}{(t-z)\sqrt{R(t)}} = -\frac{2}{2p+1} \frac{a_0}{b_0} A^{-1} t^{\mu-\nu-2p-1} + \text{ fallende Potenzen von } t,$$

und es wird daher $f_0(z)$ *verschwinden, wenn*

$$\mu - \nu - 2p - 1 < -1$$

oder

$$\mu - \nu < 2p,$$

also der Grad des Zählers nicht mindestens den des Nenners um die Zahl $2p$ *übertrifft.*

Wir erwähnen hier noch eine Beziehung, welche zwischen den Coefficienten k und l der Integrale erster und zweiter Gattung in der Reductionsformel gewisser Integrale und den Coefficienten der um den Unendlichkeitspunkt herum gültigen Reihenentwicklung der Normalintegrale erster und zweiter Gattung besteht.

Sei das Integral

$$\int \frac{z^n dz}{\sqrt{R(z)}},$$

in welchem

$$\begin{aligned} R(z) &= Az(z-\alpha_1)(z-\alpha_2)\cdots(z-\alpha_{2p}) \\ &= Az^{2p+1} + B_0 z^p + B_1 z^{p-1} + \cdots + B_{2p-1} z \end{aligned}$$

—welche Form des Polynoms offenbar die Allgemeinheit der Untersuchung nicht beschränkt — und

$$n > 2p - 1$$

angenommen wird, in der oben angegebenen Weise in seine Normalintegrale zu zerlegen, so wird, da z^n für kein endliches z unendlich wird, das vorgelegte Integral gar kein Integral dritter Gattung enthalten und somit nach der Reductionsformel (7) sich in die Form bringen lassen

$$\int \frac{z^n dz}{\sqrt{R(z)}} = l_n^{(0)} \int \frac{z^{2p-1} dz}{\sqrt{R(z)}} + l_n^{(1)} \int \frac{z^{2p-2} dz}{\sqrt{R(z)}} + \cdots + l_n^{(p-1)} \int \frac{z^p dz}{\sqrt{R(z)}}$$
$$+ k_n^{(p)} \int \frac{z^{p-1} dz}{\sqrt{R(z)}} + k_n^{(p+1)} \int \frac{z^{p-2} dz}{\sqrt{R(z)}} + \cdots + k_n^{(2p-1)} \int \frac{dz}{\sqrt{R(z)}}$$
$$+ f_n(z)\sqrt{R(z)},$$

worin für $r = 0, 1, 2, \dots p-1$

$$l_n^{(r)} = -\left[\frac{t^n}{\sqrt{R(t)}} \int_\infty \frac{F_r(t)\, dt}{\sqrt{R(t)}}\right]_{t^{-1}},$$

für $r = p,\ p+1, \dots 2p-1$

$$k_n^{(r)} = -\left[\frac{t^n}{\sqrt{R(t)}} \int_\infty \frac{F_r(t)\, dt}{\sqrt{R(t)}}\right]_{t^{-1}},$$

und endlich

$$f_n(z) = -\left[\frac{t^n}{\sqrt{R(t)}} \int_\infty \frac{dt}{(t-z)\sqrt{R(t)}}\right]_{t^{-1}}$$

ist, wenn

$$F_r(t) = \frac{2p-2r-1}{2} A t^r + \frac{2p-2r}{2} B_0 t^{r-1} + \frac{2p-2r+1}{2} B_1 t^{r-2} + \cdots$$
$$+ \frac{2p-r-2}{2} B_{r-2} t + \frac{2p-r-1}{2} B_{r-1}$$

gesetzt wird.

Indem wir uns zuerst mit der Grösse $l_n^{(r)}$ beschäftigen, setzen wir

$$l_n^{(r)} = -\left[\frac{1}{\sqrt{R(t)}} \int_\infty \frac{F_r(t)\, dt}{\sqrt{R(t)}}\right]_{t^{-n-1}}$$

und schliessen aus dieser Form, dass die Entwicklung des Ausdrucks

$$-\frac{1}{\sqrt{R(t)}} \int_\infty \frac{F_r(t)\, dt}{\sqrt{R(t)}}$$

nach fallenden Potenzen von t, da $n > 2p-1$ angenommen wurde, als Coefficienten der Potenzen

$$t^{-2p-1}, \quad t^{-2p-2}, \quad \dots$$

die Grössen

$$l^{(r)}_{2p}, \quad l^{(r)}_{2p+1}, \quad \cdots$$

liefert.

Da nun aus den Entwicklungen

$$\frac{1}{\sqrt{R(t)}} = A^{-\frac{1}{2}} t^{-p-\frac{1}{2}} + \cdots$$
$$F_r(t) = \frac{2p-2r-1}{2} A t^r + \cdots$$

unmittelbar

$$\int_\infty \frac{F_r(t)\,dt}{\sqrt{R(t)}} = -A^{\frac{1}{2}} t^{r-p+\frac{1}{2}} + \cdots$$

und daher

$$-\frac{1}{\sqrt{R(t)}} \int_\infty \frac{F_r(t)\,dt}{\sqrt{R(t)}} = t^{r-2p} + \cdots$$

folgt, so ist leicht zu sehen, dass

$$\int_\infty \frac{F_r(t)\,dt}{\sqrt{R(t)}} = -\left(t^{r-2p} + m_1 t^{r-2p-1} + \cdots + m_{r-1} t^{-2p}\right) \sqrt{R(t)}$$
$$- \sqrt{R(t)} \sum_{\nu=0}^{\infty} l^{(r)}_{2p+\nu} t^{-2p-\nu-1},$$

worin das auf der linken Seite der Gleichung befindliche Integral, weil $r = 0, 1, 2, \cdots p-1$, ein Integral erster Gattung ist, und die Grössen

$$m_1, \; m_2, \; \cdots \; m_{r-1}$$

rational aus den Constanten von $R(z)$ zusammengesetzte Ausdrücke bedeuten; hiermit wäre *die Beziehung zwischen den Coefficienten l der Integrale zweiter Gattung in der Reductionsformel des mit n variirenden Integrales*

$$\int \frac{z^n\,dz}{\sqrt{R(z)}}$$

und den Coefficienten der um den unendlich entfernten Punkt gültigen Reihenentwicklung gewisser Integrale erster Gattung gefunden.

Setzen wir ferner die Grösse $k^{(r)}_n$ in die Form

$$k^{(r)}_n = -\left[\frac{1}{\sqrt{R(t)}} \int_\infty \frac{F_r(t)\,dt}{\sqrt{R(t)}}\right]_{t^{-n-1}},$$

so wird sich genau ebenso, wenn

$$r = p,\ p+1,\ \cdots\ 2p-1$$

gesetzt wird,

$$\int_\infty \frac{F_r(t)\,dt}{\sqrt{R(t)}} = -(n_0 t^{r-2p} + n_1 t^{r-2p-2} + \cdots + n_{r-1} t^{-2p})\sqrt{R(t)}$$
$$- \sqrt{R(t)} \sum_{\nu=0}^{\infty} k_{2p+\nu}^{(r)} t^{-2p-\nu-1}$$

ergeben, worin wegen $r = p, p+1, \cdots 2p-1$ das Integral auf der linken Seite der Gleichung ein Integral zweiter Gattung ist, und es wird damit *die analoge Beziehung zwischen den Coefficienten k der Integrale erster Gattung in der Reductionsformel der mit n variirenden Integrale*

$$\int \frac{z^n\,dz}{\sqrt{R(z)}}$$

und den Coefficienten der um den unendlich entfernten Punkt gültigen Reihenentwicklung gewisser Integrale zweiter Gattung gefunden sein.

Es mag hier endlich noch einer Normalform der Irrationalität der hyperelliptischen Integrale Erwähnung geschehen, die häufig gebraucht und durch die Substitution

$$\zeta = \frac{z-\alpha_2}{\alpha_1-\alpha_2}$$

erhalten wird, aus welcher

$$z = \zeta(\alpha_1-\alpha_2)+\alpha_2,$$

also

$$\begin{aligned}
z-\alpha_1 &= (\alpha_1-\alpha_2)\,(\zeta-1)\\
z-\alpha_2 &= (\alpha_1-\alpha_2)\ \zeta\\
z-\alpha_3 &= (\alpha_1-\alpha_2)\left(\zeta-\frac{\alpha_3-\alpha_2}{\alpha_1-\alpha_2}\right)\\
z-\alpha_4 &= (\alpha_1-\alpha_2)\left(\zeta-\frac{\alpha_4-\alpha_2}{\alpha_1-\alpha_2}\right)\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
z-\alpha_{2p+1} &= (\alpha_1-\alpha_2)\left(\zeta-\frac{\alpha_{2p+1}-\alpha_2}{\alpha_1-\alpha_2}\right)
\end{aligned}$$

folgt; setzt man

$$\varkappa_1^2 = \frac{\alpha_1 - \alpha_2}{\alpha_3 - \alpha_2}$$
$$\varkappa_2^2 = \frac{\alpha_1 - \alpha_2}{\alpha_4 - \alpha_2}$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\varkappa_{2p-1}^2 = \frac{\alpha_1 - \alpha_2}{\alpha_{2p+1} - \alpha_2},$$

so ergiebt sich unmittelbar

$$\sqrt{R(z)} \\ = (\alpha_1 - \alpha_2)\sqrt{A(\alpha_3 - \alpha_2)(\alpha_4 - \alpha_2)\cdots(\alpha_{2p+1} - \alpha_2)}\sqrt{\zeta(1-\zeta)(1-\varkappa_1^2\zeta)(1-\varkappa_2^2\zeta)\cdots(1-\varkappa_{2p-1}^2\zeta)},$$

und es ist daher jedes hyperelliptische Integral in der Form darstellbar

$$\int F\left(\zeta, \sqrt{\zeta(1-\zeta)(1-\varkappa_1^2\zeta)(1-\varkappa_2^2\zeta)\cdots(1-\varkappa_{2p-1}^2\zeta)}\right) d\zeta.$$

Fünfte Vorlesung.

Beziehungen zwischen den Periodicitätsmoduln der zu derselben Irrationalität gehörigen hyperelliptischen Integrale.

Nachdem am Schlusse der dritten Vorlesung die Periodicitätsmoduln eines allgemeinen hyperelliptischen Integrales aufgestellt worden, gehen wir nunmehr dazu über, die Beziehungen zwischen den Perioden zweier beliebigen, aber zu derselben Irrationalität gehörigen hyperelliptischen Integrale herzuleiten, und betrachten zu diesem Zwecke ein Integral

$$J(z, z_\alpha),$$

welches auf festbestimmten Blättern in den Punkten

$$\mathfrak{z}_1,\ \mathfrak{z}_2,\ \cdots\ \mathfrak{z}_\mu,\ z_1,\ z_2,\ \cdots\ z_m,\ \alpha_1,\ \alpha_2,\ \cdots\ \alpha_{2p+1},\ \infty$$

unendlich werden soll, wie die Functionen

$$\mathfrak{A}_1 \log(z-\mathfrak{z}_1) + \mathfrak{B}_1(z-\mathfrak{z}_1)^{-1} + \mathfrak{C}_1(z-\mathfrak{z}_1)^{-2} + \cdots + \mathfrak{K}_1(z-\mathfrak{z}_1)^{-\mathfrak{k}_1},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\mathfrak{A}_\mu \log(z-\mathfrak{z}_\mu) + \mathfrak{B}_\mu(z-\mathfrak{z}_\mu)^{-1} + \mathfrak{C}_\mu(z-\mathfrak{z}_\mu)^{-2} + \cdots + \mathfrak{K}_\mu(z-\mathfrak{z}_\mu)^{-\mathfrak{k}_\mu},$$

$$A_1 \log(z-z_1) + B_1(z-z_1)^{-1} + C_1(z-z_1)^{-2} + \cdots + K_1(z-z_1)^{-k_1},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$A_m \log(z-z_m) + B_m(z-z_m)^{-1} + C_m(z-z_m)^{-2} + \cdots + K_m(z-z_m)^{-k_m},$$

$$a_1 \log(z-\alpha_1)^{\frac{1}{2}} + b_1(z-\alpha_1)^{-\frac{1}{2}} + c_1(z-\alpha_1)^{-\frac{2}{2}} + \cdots + h_1(z-\alpha_1)^{-\frac{\lambda_1}{2}},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$a_{2p+1} \log(z-\alpha_{2p+1})^{\frac{1}{2}} + b_{2p+1}(z-\alpha_{2p+1})^{-\frac{1}{2}} + c_{2p+1}(z-\alpha_{2p+1})^{-\frac{2}{2}} + \cdots$$
$$+ h_{2p+1}(z-\alpha_{2p+1})^{-\frac{\lambda_{2p+1}}{2}},$$

$$M_0 \log z^{\frac{1}{2}} + M_1 z^{\frac{1}{2}} + M_2 z^{\frac{2}{2}} + \cdots + M_\delta z^{\frac{\delta}{2}},$$

und ein Integral

$$J(z, \zeta_\alpha),$$

welches in den Punkten

$$\mathfrak{z}_1,\ \mathfrak{z}_2,\ \cdots\ \mathfrak{z}_\mu,\ \zeta_1,\ \zeta_2,\ \cdots\ \zeta_n,\ \alpha_1,\ \alpha_2,\ \cdots\ \alpha_{2p+1},\ \infty$$

unendlich werden soll wie die Functionen

$$\mathfrak{A}'_1 \log(z-\mathfrak{z}_1) + \mathfrak{B}'_1(z-\mathfrak{z}_1)^{-1} + \mathfrak{C}'_1(z-\mathfrak{z}_1)^{-2} + \cdots + \mathfrak{K}'_1(z-\mathfrak{z}_1)^{-\mathfrak{k}'_1},$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$\mathfrak{A}' \log(z-\mathfrak{z}) + \mathfrak{B}'(z-\mathfrak{z})^{-1} + \mathfrak{C}'(z-\mathfrak{z})^{-2} + \cdots + \mathfrak{K}'(z-\mathfrak{z})^{-\mathfrak{k}'},$$

$$A'_1 \log(z-\zeta_1) + B'_1(z-\zeta_1)^{-1} + C'_1(z-\zeta_1)^{-2} + \cdots + K'_1(z-\zeta_1)^{-k'_1},$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$A'_n \log(z-\zeta_n) + B'_n(z-\zeta_n)^{-1} + C'_n(z-\zeta_n)^{-2} + \cdots + K'_n(z-\zeta_n)^{-k'_n},$$

$$a'_1 \log(z-\alpha_1)^{\frac{1}{2}} + b'_1(z-\alpha_1)^{-\frac{1}{2}} + c'_1(z-\alpha_1)^{-\frac{2}{2}} + \cdots + h'_1(z-\alpha_1)^{-\frac{\lambda'_1}{2}},$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$a'_{2p+1} \log(z-\alpha_{2p+1})^{\frac{1}{2}} + b'_{2p+1}(z-\alpha_{2p+1})^{-\frac{1}{2}} + c'_{2p+1}(z-\alpha_{2p+1})^{-\frac{2}{2}} + \cdots$$
$$+ h'_{2p+1}(z-\alpha_{2p+1})^{-\frac{\lambda'_{2p+1}}{2}},$$

$$M'_0 \log z^{\frac{1}{2}} + M'_1 z^{\frac{1}{2}} + M'_2 z^{\frac{2}{2}} + \cdots + M'_\delta z^{\frac{\delta'}{2}},$$

wobei selbstverständlich der Bedingung gemäss, dass jene Functionen hyperelliptische Integrale sind, die Beziehungen bestehen

$$\mathfrak{A}_1 + \cdots + \mathfrak{A} + A_1 + \cdots + A_m + a_1 + \cdots + a_{2p+1} - M_0 = 0$$
$$\mathfrak{A}'_1 + \cdots + \mathfrak{A}' + A'_1 + \cdots + A'_n + a'_1 + \cdots + a'_{2p+1} - M'_0 = 0,$$

und in der Annahme der Unstetigkeitsfunctionen die allgemeinste Voraussetzung enthalten ist, dass die beiden Integrale eine Anzahl gemeinsamer Unstetigkeitsstellen, die zugleich auf demselben Blatte liegen sollen, besitzen.

Legen wir nunmehr der weiteren Betrachtung die Function

$$J(z, z_\alpha)\frac{dJ(z,\zeta_\alpha)}{dz}$$

zu Grunde, welche nach Früherem auf der durch die Querschnitte

$$a_1, a_2, \ldots a_p, b_1, b_2, \ldots b_p, c_1, c_2, \ldots c_{p-1}$$

zerlegten Riemann'schen Fläche F' von $\sqrt{R(z)}$, deren Verzweigungspunkte

$$\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_{2p+1}, \infty$$

sein sollten, eindeutig ist, und untersuchen das Integral

$$\int J(z, z_\alpha)\ dJ(z, \zeta)$$

über die gesammte Begränzung der einfach zusammenhängenden Fläche ausgedehnt, welche aus F' durch neue

$$\mu + m + n + 2p + 2$$

Querschnitte entsteht, welche jeden der die Punkte

$$\mathfrak{z}_1, \mathfrak{z}_2, \ldots \mathfrak{z}, z_1, z_2, \ldots z_m, \zeta_1, \zeta_2, \ldots \zeta_n$$

umschliessenden unendlich kleinen einfachen Kreise und jeden der die Punkte

$$\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_{2p+1}, \infty$$

umgebenden unendlich kleinen Doppelkreise mit demselben Punkte der früher erhaltenen Begränzung verbinden, z. B. mit dem Punkte A, von dem aus man sich die gesammte Begränzung durchlaufen denken will.

Mag zuerst die Integration nach den den beiden Functionen gemeinsamen Unstetigkeitspunkten

$$\mathfrak{z}_1, \mathfrak{z}_2, \cdots \mathfrak{z}_\mu$$

hin ausgeführt werden, so wird, wenn die Entwicklung von $J(z, z_\alpha)$ in der Umgebung von $\mathfrak{z}_\varrho$

$$\mathfrak{A}_\varrho \log(z - \mathfrak{z}_\varrho) + \mathfrak{B}_\varrho (z - \mathfrak{z}_\varrho)^{-1} + \cdots + \mathfrak{K}_\varrho (z - \mathfrak{z}_\varrho)^{-\mathfrak{k}_\varrho} + m_0^{(\varrho)} + m_1^{(\varrho)} (z - \mathfrak{z}_\varrho) + \cdots$$
$$+ m_{\mathfrak{k}'_\varrho}^{(\varrho)} (z - \mathfrak{z}_\varrho)^{\mathfrak{k}'_\varrho} + \cdots,$$

die von $J(z, \zeta_\alpha)$

$$\mathfrak{A}'_\varrho \log(z - \mathfrak{z}_\varrho) + \mathfrak{B}'_\varrho (z - \mathfrak{z}_\varrho)^{-1} + \cdots + \mathfrak{K}'_\varrho (z - \mathfrak{z}_\varrho)^{-\mathfrak{k}'_\varrho} + n_0^{(\varrho)} + n_1^{(\varrho)} (z - \mathfrak{z}_\varrho) + \cdots$$
$$+ n_{\mathfrak{k}_\varrho}^{(\varrho)} (z - \mathfrak{z}_\varrho)^{\mathfrak{k}_\varrho} + \cdots$$

also die von

$$\frac{dJ(z, \zeta_\alpha)}{dz}$$

folgendermassen lautet:

$$\mathfrak{A}'_\varrho (z - \mathfrak{z}_\varrho)^{-1} - \mathfrak{B}'_\varrho (z - \mathfrak{z}_\varrho)^{-2} - \cdots - \mathfrak{k}'_\varrho \mathfrak{K}'_\varrho (z - \mathfrak{z}_\varrho)^{-\mathfrak{k}'_\varrho - 1} + n_1^{(\varrho)} + 2 n_2^{(\varrho)} (z - \mathfrak{z}_\varrho) + \cdots$$
$$+ \mathfrak{k}_\varrho n_{\mathfrak{k}_\varrho}^{(\varrho)} (z - \mathfrak{z}_\varrho)^{\mathfrak{k}_\varrho - 1} + \cdots,$$

zuerst der Werth des um den Punkt $\mathfrak{z}_\varrho$ in einem unendlich kleinen Kreise genommen Integrales

$$\int_{(\mathfrak{z}_\varrho)} J(z, z_\alpha) dJ(z, \zeta_\alpha)$$

zu ermitteln sein, welches sich aus Einzelintegralen der Form

$$\int_{(\mathfrak{z}_\varrho)} \log(z-\mathfrak{z}_\varrho)(z-\mathfrak{z}_\varrho)^\sigma dz, \int_{(\mathfrak{z}_\varrho)} (z-\mathfrak{z}_\varrho)^{-1} dz, \int_{(\mathfrak{z}_\varrho)} (z-\mathfrak{z}_\varrho)^\tau dz$$

zusammensetzt, worin σ und τ positive oder negative ganze Zahlen bedeuten; nun ist aber, wenn

$$z - \mathfrak{z}_\varrho = re^{i\varphi}$$

gesetzt wird,

$$\int_{(\mathfrak{z}_\varrho)} \log(z-\mathfrak{z}_\varrho)(z-\mathfrak{z}_\varrho)^\sigma dz = ir^{\sigma+1} \log r \int_0^{2\pi} e^{(\sigma+1)i\varphi}\, d\varphi - r^{\sigma+1} \int_0^{2\pi} e^{(\sigma+1)i\varphi} \varphi\, d\varphi,$$

und somit für unendlich kleine r, wie aus dem Gränzwerthe von $r^{\sigma+1}\log(r)$ folgt,

wenn $\sigma \geqq 0$, der Werth des Integrales Null,
wenn $\sigma \leqq -1$, der Werth des Integrales unendlich,

ferner

$$\int_{(\mathfrak{z}_\varrho)} (z-\mathfrak{z}_\varrho)^{-1} dz = 2\pi i$$

und

$$\int_{(\mathfrak{z}_\varrho)} (z-\mathfrak{z}_\varrho)^\tau dz = 0 \quad \text{für positive und negative } \tau,$$

woraus folgt, *dass von vornherein der Fall, in welchem $\sigma \leqq -1$ ist, ausgeschlossen, d. h. dass entweder*

$$\mathfrak{A}'_\varrho = \mathfrak{B}'_\varrho = \ldots = \mathfrak{K}'_\varrho = 0,$$

oder

$$\mathfrak{A}_\varrho = 0$$

sein muss, oder dass, weil der Voraussetzung nach $J(z, \zeta_\alpha)$ in $\mathfrak{z}_\varrho$ unendlich werden sollte, nur die zweite Annahme statthaben, d. h. $J(z, z_\alpha)$ in $\mathfrak{z}_\varrho$ nur algebraisch unendlich werden darf. *)

---

*) Wenigstens sollen die andern Fälle sowie die nachher anzuführenden analogen für die Verzweigungspunkte von der weiteren Betrachtung ausgeschlossen sein.

Somit ergiebt sich als Werth des um $\mathfrak{z}_\varrho$ genommenen Kreisintegrales, wie aus der oben aufgestellten Form der Entwicklung hervorgeht,

$$2\pi i\left[n_1^{(\varrho)}\mathfrak{B}_\varrho + 2n_2^{(\varrho)}\mathfrak{C}_\varrho + \cdots + \mathfrak{k}_\varrho n_{\mathfrak{k}_\varrho}^{(\varrho)}\mathfrak{K}_\varrho + m_0^{(\varrho)}\mathfrak{A}'_\varrho - m_1^{(\varrho)}\mathfrak{B}'_\varrho - 2m_2^{(\varrho)}\mathfrak{C}'_\varrho - \cdots - \mathfrak{k}'_\varrho m_{\mathfrak{k}'_\varrho}^{(\varrho)}\mathfrak{K}'_\varrho\right],$$

und wenn man beachtet, dass $J(z, z_\alpha)$ bei der Umkreisung von $\mathfrak{z}_\varrho$ wegen $\mathfrak{A}_\varrho = 0$ ebensowenig seinen Werth ändert wie die in $\mathfrak{z}_\varrho$ nur algebraisch unendlich werdende Function $\frac{dJ(z,\zeta_\alpha)}{dz}$, so werden die Integrationen längs den beiden Seiten der Verbindungslinien dieser Kreise mit jenem Ausgangspunkte der Bewegung, weil in verschiedener Richtung ausgeführt, sich wegheben, und somit jene μ Punkte $\mathfrak{z}$ zur Gesammtintegration den Werth liefern

$$(1)\qquad 2\pi i\sum_{\varrho=1}^{\mu}\Big[n_1^{(\varrho)}\mathfrak{B}_\varrho + 2n_2^{(\varrho)}\mathfrak{C}_\varrho + \cdots + \mathfrak{k}_\varrho n_{\mathfrak{k}_\varrho}^{(\varrho)}\mathfrak{K}_\varrho$$
$$+m_0^{(\varrho)}\mathfrak{A}'_\varrho - m_1^{(\varrho)}\mathfrak{B}'_\varrho - 2m_2^{(\varrho)}\mathfrak{C}'_\varrho - \cdots - \mathfrak{k}'_\varrho m_{\mathfrak{k}'_\varrho}^{(\varrho)}\mathfrak{K}'_\varrho\Big],$$

während man am Schlusse dieses Theiles der Integration zum Anfangspunkte mit unverändertem Werthe der Function unter dem Integral zurückkehrt.

Durchläuft man jetzt die Verbindungslinien nach den ζ-Punkten und die diese Punkte umschliessenden unendlich kleinen Kreislinien, so wird, wenn die Entwicklung von $J(z, z_\alpha)$ in der Umgebung von ζ_ϱ sich in der Form darstellt

$$J(z, z_\alpha) = p_0^{(\varrho)} + p_1^{(\varrho)}(z-\zeta_\varrho) + p_2^{(\varrho)}(z-\zeta_\varrho)^2 + \cdots + p_{k'_\varrho}^{(\varrho)}(z-\zeta_\varrho)^{k'_\varrho} + \cdots,$$

vermöge des aus der oben angegebenen Form der Unstetigkeitsfunction sich ergebenden Ausdruckes

$$\frac{dJ(z,\zeta_\alpha)}{dz} = A'_\varrho(z-\zeta_\varrho)^{-1} - B'_\varrho(z-\zeta_\varrho)^{-2} - 2C'_\varrho(z-\zeta_\varrho)^{-3} - \cdots - k'_\varrho K'_\varrho(z-\zeta_\varrho)^{-k'_\varrho-1} + \cdots,$$

wie unmittelbar ersichtlich, das um ζ_ϱ genommene Integral durch den Werth gegeben sein

$$2\pi i\left[p_0^{(\varrho)}A'_\varrho - p_1^{(\varrho)}B'_\varrho - 2p_2^{(\varrho)}C'_\varrho - \cdots - k'_\varrho p_{k'_\varrho}^{(\varrho)}K'_\varrho\right];$$

da aber ferner bei der Umkreisung von ζ_ϱ das Integral $J(z, z_\alpha)$, weil es in diesem Punkte endlich bleibt, ebensowenig seinen Werth ändert als die algebraisch unendlich werdende Grösse $\dfrac{dJ(z,\zeta_\alpha)}{dz}$, so werden wieder die längs der Verbindungslinie ausgeführten Integrationen sich aufheben, und das Gesammtresultat der die Punkte ζ betreffenden Integrationen sich in der Form darstellen

$$(2)\qquad 2\pi i\sum_{\varrho=1}^{n}\left[p_0^{(\varrho)}A'_\varrho - p_1^{(\varrho)}B'_\varrho - 2p_2^{(\varrho)}C'_\varrho - \cdots - k'_\varrho p_{k'_\varrho}^{(\varrho)}K'_\varrho\right].$$

Gehen wir nunmehr zu den Punkten $z_1, \cdots z_m$ über, so ist klar, dass die um z_ϱ ausgeführte Integration

$$\int_{(z_\varrho)} J(z, z_\alpha)\, dJ(z, \zeta_\alpha),$$

da in der Umgebung von z_ϱ

$$J(z, z_\alpha) = A_\varrho \log(z - z_\varrho) + B_\varrho (z - z_\varrho)^{-1} + \cdots + K_\varrho (z - z_\varrho)^{-k_\varrho} + \cdots,$$

und

$$\begin{aligned} J(z, \zeta_\alpha) = \pi_0^{(\varrho)} &+ \pi_1^{(\varrho)}(z - z_\varrho) + \pi_2^{(\varrho)}(z - z_\varrho)^2 + \cdots \\ &+ \pi_{k_\varrho}^{(\varrho)}(z - z_\varrho)^{k_\varrho} + \cdots \end{aligned}$$

also

$$\frac{dJ(z, \zeta_\alpha)}{dz} = \pi_1^{(\varrho)} + 2\pi_2^{(\varrho)}(z - z_\varrho) + \cdots + k_\varrho \pi_{k_\varrho}^{(\varrho)}(z - z_\varrho)^{k_\varrho - 1} + \cdots$$

ist, nur abhängen wird von Integralen der Form

$$\int_{(z_\varrho)} \log(z - z_\varrho)(z - z_\varrho)^m dz, \quad \int_{(z_\varrho)} (z - z_\varrho)^{-1} dz, \quad \int_{(z_\varrho)} (z - z_\varrho)^n dz,$$

in denen $m \geqq 0$ und n eine beliebige ganze Zahl bedeutet. Da nun, wie vorher gezeigt worden, das erste dieser Integrale verschwindet, das zweite den Werth $2\pi i$ hat, während das dritte Null ist, so folgt, dass

$$\int_{(z_\varrho)} J(z, z_\alpha)\, dJ(z, \zeta_\alpha) = 2\pi i \left[\pi_1^{(\varrho)} B_\varrho + 2\pi_2^{(\varrho)} C_\varrho + \cdots + k_\varrho \pi_{k_\varrho}^{(\varrho)} K_\varrho\right]$$

wird. Da ferner bei einer Umkreisung von z_ϱ die Function $J(z, z_\alpha)$ vermöge ihres logarithmischen Gliedes um $2\pi i A_\varrho$ zunimmt, während $dJ(z, \zeta_\alpha)$ seinen Anfangswerth wieder erreicht, so werden die beiden längs der Verbindungslinie des Querschnittsystems mit der Kreisperipherie von z_ϱ, auf beiden Seiten derselben, auszuführenden Integrationen den Werth liefern

$$\int_A^{z_\varrho} \big(J^-(z, z_\alpha) - J^+(z, z_\alpha)\big)\, dJ(z, \zeta_\alpha) = -2\pi i A_\varrho \int_A^{z_\varrho} dJ(z, \zeta_\alpha),$$

worin A den Ausgangspunkt der Integration bedeutet, und die Bezeichnungen nach früheren Definitionen und mit Rücksicht auf die dortige Figur gewählt sind; um nun zu dem folgenden Punkte $z_{\varrho+1}$ überzugehen, ist das Integral

$$\int_{(z_{\varrho+1})} \big(J(z, z_\alpha) + 2\pi i A_\varrho\big)\, dJ(z, \zeta_\alpha)$$

auszuführen, welches, da die unter dem Integral zu $J(z, z_\alpha)$ hinzugefügte additive Grösse für das Kreisintegral keine Veränderung hervorbringt, einen dem oben angegebenen analogen Ausdruck liefert, während das Resultat der beiden von A nach $z_{\varrho+1}$ in entgegengesetzter Richtung genommenen Integrationen durch

$$\int_A^{z_{\varrho+1}} \Big[\big(J^-(z, z_\alpha) + 2\pi i A_\varrho\big) - \big(J^+(z, z_\alpha) + 2\pi i A_\varrho\big)\Big]\, dJ(z, \zeta_\alpha)$$
$$= -2\pi i A_{\varrho+1} \int_A^{z_{\varrho+1}} dJ(z, \zeta_\alpha)$$

dargestellt wird. Fasst man, indem man so weiter geht, alle diese Theilintegrationen zusammen, so liefert der Complex der Punkte $z_1, z_2, \dots z_m$ das Resultat

$$(3) \qquad 2\pi i \sum_{\varrho=1}^{m} \left\{ \Big[\pi_1^{(\varrho)} B_\varrho + 2\pi_2^{(\varrho)} C_\varrho + \cdots + k_\varrho \pi_{k_\varrho}^{(\varrho)} K_\varrho\Big] - A_\varrho \int_A^{z_\varrho} dJ(z, \zeta_\alpha) \right\},$$

und es bleibt nur noch vom Punkte A aus die Integration

$$\int \Big[J(z, z_\alpha) + 2\pi i (A_1 + A_2 + \cdots + A_m)\Big] dJ(z, \zeta_\alpha)$$

über die von den Verzweigungspunkten und dem unendlich entfernten Punkte herrührenden Theile auszuführen.

Geht man zuerst wieder von A aus zu dem Verzweigungspunkte α_1 und umkreist diesen, so ist vor Allem zu sehen, dass es sich um die Ermittlung der beiden längs dem unendlich kleinen Doppelkreise genommenen Integrale

$$\int_{(\alpha_1)} J(z, z_\alpha)\, dJ(z, \zeta_\alpha) \quad \text{und} \quad 2\pi i (A_1 + A_2 + \cdots + A_m) \int_{(\alpha_1)} dJ(z, \zeta_\alpha)$$

handelt, von denen das zweite wegen der in der Nähe des Verzweigungspunktes gültigen Entwicklung

$$dJ(z, \zeta_\alpha) = \tfrac{1}{2} a_1' (z - \alpha_1)^{-1} - \tfrac{1}{2} b_1' (z - \alpha_1)^{-\frac{3}{2}} - \tfrac{2}{2} c_1' (z - \alpha_1)^{-\frac{4}{2}} - \cdots$$

den Werth

$$-(2\pi)^2 a_1' (A_1 + A_2 + \cdots + A_m)$$

annimmt, und längs der Verbindungslinie mit dem Doppelpunkte sich aufhebende Integrale liefert, weil $dJ(z, \zeta_\alpha)$ sich bei der Umkreisung des Verzweigungspunktes nicht ändert. Was nun das erste der beiden obigen Integrale angeht, so lautet vermöge der angenommenen Unstetigkeitsfunctionen die Entwicklung der beiden Factoren in der Umgebung des Verzweigungspunktes

$$J(z, z_\alpha) = a_1 \log(z - \alpha_1)^{\frac{1}{2}} + b_1 (z - \alpha_1)^{-\frac{1}{2}} + c_1 (z - \alpha_1)^{-\frac{2}{2}} + \cdots$$
$$+ h_1 (z - \alpha_1)^{-\frac{\lambda_1}{2}} + \mu_0^{(1)} + \mu_1^{(1)} (z - \alpha_1)^{\frac{1}{2}} + \cdots + \mu_{\lambda_1'}^{(1)} (z - \alpha_1)^{\frac{\lambda_1'}{2}} \cdots,$$

und wenn

$$J(z,\zeta_\alpha) = a_1' \log(z-\alpha_1)^{\frac{1}{2}} + b_1'(z-\alpha_1)^{-\frac{1}{2}} + c_1'(z-\alpha_1)^{-\frac{2}{2}} + \cdots$$
$$+ h_1'(z-\alpha_1)^{-\frac{\lambda_1'}{2}} + \nu_0^{(1)} + \nu_1^{(1)}(z-\alpha_1)^{\frac{1}{2}} + \nu_2^{(1)}(z-\alpha_1)^{\frac{2}{2}} + \cdots + \nu_{\lambda_1}^{(1)}(z-\alpha_1)^{\frac{\lambda_1}{2}} + \cdots$$

gesetzt wird,

$$dJ(z,\zeta_\alpha) = \tfrac{1}{2}a_1'(z-\alpha_1)^{-\frac{2}{2}} - \tfrac{1}{2}b_1'(z-\alpha_1)^{-\frac{3}{2}} - \tfrac{2}{2}c_1'(z-\alpha_1)^{-\frac{4}{2}} - \cdots$$
$$-\tfrac{\lambda_1'}{2}h_1'(z-\alpha_1)^{-\frac{\lambda_1'-2}{2}} + \tfrac{1}{2}\nu_1^{(1)}(z-\alpha_1)^{-\frac{1}{2}} + \nu_2^{(1)} + \cdots + \tfrac{\lambda_1}{2}\nu_{\lambda_1}^{(1)}(z-\alpha_1)^{\frac{\lambda_1-2}{2}} + \cdots,$$

und es wird somit das um α_1 genommene Integral aus den drei verschiedenen Integralformen zusammengesetzt sein

$$\int_{(\alpha_1)} \log(z-\alpha_1)^{\frac{1}{2}}(z-\alpha_1)^{\frac{\sigma}{2}}dz, \qquad \int_{(\alpha_1)} (z-\alpha_1)^{\frac{\tau}{2}}dz, \qquad \int_{(\alpha_1)} (z-\alpha_1)^{-1}dz,$$

worin σ und τ positive oder negative ganze Zahlen bedeuten. Setzt man in das erste dieser Integrale

$$(z-\alpha_1)^{\frac{1}{2}} = \zeta,$$

so geht dieses über in

$$2\int_{(0)} \log\zeta \cdot \zeta^{\sigma+1}d\zeta,$$

welches nach Früherem, wenn $\sigma+1 \geqq 0$ oder $\sigma \geqq -1$, verschwindet, während es, wenn $\sigma+1 \leqq -1$ oder $\sigma \leqq -2$ ist, unendlich gross wird; der Werth des zweiten Integrales geht durch dieselbe Substitution in

$$\int_{(0)} \zeta^{\tau+1}d\zeta = 0$$

über, während das dritte den Werth $4\pi i$ annimmt; es folgt daraus, *dass von vornherein — wie oben — der Fall, in welchem $\sigma \leqq -2$ ausgeschlossen werden muss, dass also entweder $J(z,\zeta_\alpha)$ garnicht in α_1 unendlich werden, oder dass $J(z,\zeta_\alpha)$ in diesem Punkte nur algebraisch unendlich werden kann.* Somit ergiebt sich als Werth des obigen um α_1 genommenen Kreisintegrales

$$2\pi i\left[b_1\nu_1^{(1)} + 2c_1\nu_2^{(1)} + \cdots + \lambda_1 h_1\nu_{\lambda_1}^{(1)} + a_1'\mu_0^{(1)} - b_1'\mu_1^{(1)} - 2c_1'\mu_2^{(1)} - \cdots - \lambda_1'h_1'\mu_{\lambda_1'}^{(1)}\right],$$

wobei zu bemerken, dass, wenn a_1 von Null verschieden,

$$a_1' = b_1' = \cdots = h_1' = 0$$

zu nehmen ist.

Bei der Umkreisung von α_1 wird sich der Werth von $J(z, z_\alpha)$ nur dann geändert haben, wenn $J(z, z_\alpha)$ in α_1, logarithmisch unendlich wird, also $J(z, \zeta_\alpha)$, wie gezeigt worden, in diesem Punkte endlich ist, und zwar um $2\pi i a_1$, und von den beiden Ausdrücken

$$-(2\pi)^2 a_1'(A_1 + A_2 + \cdots + A_m) \text{ und } 2\pi i a_1$$

existirt also immer nur der eine, während der andere verschwindet; die längs der Verbindungslinie von A mit dem Verzweigungspunkte α_1 auszuführenden Integrationen werden sich aufheben, wenn der zweite Ausdruck Null ist, wenn dagegen der erste Ausdruck verschwindet, so wird der Werth derselben durch

$$-2\pi i a_1 \int_A^{\alpha_1} dJ(z, \zeta_\alpha)$$

dargestellt sein, und dieses Integral einen endlichen bestimmten Werth haben, da $J(z, \zeta_\alpha)$ in diesem Falle in α_1 endlich sein muss. Geht man sodann zu α_2 über, so dass

$$\int [J(z, z_\alpha) + 2\pi i(A_1 + A_2 + \cdots + A_m + a_1)] dJ(z, \zeta_\alpha)$$

auszuführen ist, indem nur für den zweiten Fall $a_1 = 0$ sein wird, so ergiebt sich wieder

$$-(2\pi)^2 a_2'(A_1 + A_2 + \cdots + A_m + a_1)$$

und

$$2\pi i \left[b_2\nu_1^{(2)} + 2c_2\nu_2^{(2)} + \cdots + \lambda_2 h_2 \nu_{\lambda_2}^{(2)} + a_2'\mu_0^{(2)} - b_2'\mu_1^{(2)} - 2c_2'\mu_2^{(2)} - \cdots - \lambda_2' h_2' \mu_{\lambda_2'}^{(2)}\right],$$

worin wieder, wenn a_2 von Null verschieden ist,

$$a_2' = b_2' = \cdots = h_2' = 0$$

zu setzen ist, während die Integrale längs den Verbindungslinien sich zu

$$-2\pi i a_2 \int_A^{\alpha_2} dJ(z, \zeta_\alpha)$$

zusammensetzen.

Fasst man die zuletzt gefundenen Resultate zusammen, so folgt, dass das Resultat der gesammten um die Punkte $\alpha_1, \ldots \alpha_{2p+1}$ und längs den Verbindungslinien dieser mit den Querschnitten ausgeführten Integrationen den Ausdruck liefert

$$(4) \qquad 2\pi i \sum_{\varrho=1}^{2p+1} \Bigg\{ \Big[b_\varrho \nu_1^{(\varrho)} + 2c_\varrho \nu_2^{(\varrho)} + \cdots + \lambda_\varrho h_\varrho \nu_{\lambda_\varrho}^{(\varrho)}$$
$$+ a_\varrho' \mu_0^{(\varrho)} - b_\varrho' \mu_1^{(\varrho)} - 2c_\varrho' \mu_2^{(\varrho)} - \cdots - \lambda_\varrho' h_\varrho' \mu_{\lambda_\varrho'}^{(\varrho)} \Big] - a_\varrho \int_A^{\alpha_\varrho} dJ(z, \zeta_\alpha) \Bigg\}$$
$$- (2\pi)^2 \sum_{\varrho=1}^{2p+1} a_\varrho' (A_1 + A_2 + \cdots + A_m + a_1 + a_2 + \cdots + a_{\varrho-1}),$$

wobei zu bemerken, dass, wenn a_σ von Null verschieden ist,

$$a'_\sigma = b'_\sigma = \cdots = h'_\sigma = 0$$

zu nehmen sein wird.

Es bleibt somit nur noch für die Berücksichtigung aller angenommenen Unstetigkeiten das Integral

$$\int [J(z, z_\alpha) + 2\pi i(A_1 + \cdots + A_m + a_1 + \cdots + a_{2p+1}] \, dJ(z, \zeta_\alpha)$$

zu untersuchen, genommen über die durch Ausschliessung des Unendlichkeitspunktes eintretenden Integrationswege.

Was nun zuerst das Integral betrifft, welches längs dem den unendlich entfernten Punkt umschliessenden Doppelkreis zu nehmen ist, so wird dasselbe vermöge der Entwicklungen

$$\begin{gathered} J(z, z_\alpha) = M_0 \log z^{\frac{1}{2}} + M_1 z^{\frac{1}{2}} + M_2 z^{\frac{2}{2}} + \cdots \\ + M_\delta z^{\frac{\delta}{2}} + P_0 + P_1 z^{-\frac{1}{2}} + P_2 z^{-\frac{2}{2}} + \cdots + P_\delta z^{-\frac{\delta'}{2}} + \cdots \\ J(z, \zeta_\alpha) = M'_0 \log z^{\frac{1}{2}} + M'_1 z^{\frac{1}{2}} + M'_2 z^{\frac{2}{2}} + \cdots \\ + M'_{\delta'} z^{\frac{\delta'}{2}} + P'_0 + P'_1 z^{-\frac{1}{2}} + \cdots + P'_\delta z^{-\frac{\delta}{2}} + \cdots \end{gathered}$$

also

$$\begin{aligned} \frac{dJ(z, \zeta_\alpha)}{dz} &= \tfrac{1}{2} M'_0 z^{-1} + \tfrac{1}{2} M'_1 z^{-\frac{1}{2}} + M'_2 + \tfrac{3}{2} M'_3 z^{\frac{1}{2}} + \cdots \\ &\frac{\delta'}{2} M'_{\delta'} z^{\frac{\delta'-2}{2}} - \tfrac{1}{2} P'_1 z^{-\frac{3}{2}} - \cdots - \frac{\delta}{2} P'_\delta z^{\frac{-\delta-2}{2}} + \cdots \end{aligned}$$

aus dem Ausdrucke

$$-(2\pi)^2 M'_0 (A_1 + \cdots + A_m + a_1 + \cdots + a_{2p+1})$$

und Integralen von der Form

$$\int \log z^{\frac{1}{2}} z^{\frac{k}{2}} dz, \qquad \int z^{\frac{l}{2}} dz, \qquad \int z^{-1} dz$$

bestehen, von denen das erste vermöge der Substitution

$$z^{\frac{1}{2}} = \zeta$$

nach dem Früheren den Werth Null annimmt, wenn $k \leqq -3$ ist, sonst unendlich gross wird, woraus wiederum folgt, *dass entweder* $M_0 = 0$ *oder* $M'_0 = M'_1 = \cdots = M'_\delta = 0$ *sein* *muss, d. h. dass entweder $J(z, z_\alpha)$ im unendlich entfernten Punkte nicht logarithmisch unendlich oder $J(z, \zeta_\alpha)$ in diesem Punkte gar nickt unendlich wird*; das zweite Integral wird stets Null, und das dritte gleich $4\pi i$, so dass das Resultat des um den unendlich entfernten Punkt genommenen Integrales den Werth

$$(5)\qquad \begin{aligned} &2\pi i[P_0M'_0 + P_1M'_1 + 2P_2M'_2 + 3P_3M'_3 + \cdots \\ &\qquad + \delta' P_{\delta'} M'_\delta - P'_1M_1 - 2P'_2M_2 - \cdots - \delta P'_\delta M_\delta] \\ &- (2\pi)^2 M'_0(A_1 + A_2 + \cdots + A_m + a_1 + a_2 + \cdots + a_{2p+1}) \end{aligned}$$

annimmt. Die Umkreisung des Unendlichkeitspunktes wird ferner den Werth von $J(z, z_\alpha)$ um $-2\pi i M_0$ verändert haben, so dass die über die Verbindungslinie mit A genommenen Integrale sich zu dem Werthe

$$\int_A^\infty \left[J^-(z, z_\alpha) - J^+(z, z_\alpha)\right] dJ(z, \zeta_\alpha) = 2\pi i M_0 \int_A^\infty dJ(z, \zeta_\alpha)$$

zusammensetzen, worin das letzte Integral, für welches, wenn M_0 von Null verschieden ist, M'_0, M'_1 … M'_δ verschwinden, aus bekannten Gründen endlich ist, und man wird mit dem Werthe

$$\int \left[J(z, z_\alpha) + 2\pi i(A_1 + \cdots + A_m + a_1 + \cdots + a_{2p+1} - M_0)\right] dJ(z, \zeta_\alpha)$$

oder wegen der in Folge der Annahme $\mathfrak{A}_1 = \mathfrak{A}_2 = \ldots \mathfrak{A} = 0$ bestehenden Relation

$$A_1 + \cdots + A_m + a_1 + \cdots + a_{2p+1} - M_0 = 0,$$

mit dem Werthe

$$\int J(z, z_\alpha)\, dJ(z, \zeta_\alpha)$$

von A aus nunmehr die Integration über das gesammte ursprüngliche Querschnittsystem zu erstrecken haben.

Nun ist aber oben gezeigt worden, dass jedes hyperelliptische Integral, welches in der angegebenen Weise auf der Riemann'schen Fläche unendlich ist, an den c-Querschnitten den Stetigkeitssprung Null haben wird, weil das Ueberschreiten sämmtlicher von den Unstetigkeitspunkten herrührenden Querschnitte gar keine Werthveränderung des Integrals hervorbringt, und im Uebrigen der Sprung durch ein über a_1 und b_1, oder a_2 und b_2 etc. auf deren beiden Seiten genommenes Integral dargestellt wird. In Folge dessen sind auch die Stetigkeitssprünge längs der ganzen Ausdehnung der Querschnitte a_k und b_k constant, und wenn man den Sprung von

$$J(z, z_\alpha) \text{ an } a_k \text{ mit } J_{a_k}, \text{ an } b_k \text{ mit } J_{b_k},$$

von

$$J(z,\zeta_\alpha) \text{ an } a_k \text{ mit } I_{a_k}, \quad \text{an } b_k \text{ mit } I_{b_k}$$

bezeichnet, so wird das Resultat der weiteren Integration offenbar

$$\begin{aligned} &\int_{a_1^+} J(z,z_\alpha)\,dJ(z,\zeta_\alpha) - \int_{b_1^-} J(z,z_\alpha)\,dJ(z,\zeta_\alpha) \\ +&\int_{a_2^+} J(z,z_\alpha)\,dJ(z,\zeta_\alpha) - \int_{b_2^-} J(z,z_\alpha)\,dJ(z,\zeta_\alpha) + \cdots \\ -&\int_{a_2^-} J(z,z_\alpha)\,dJ(z,\zeta_\alpha) + \int_{b_2^+} J(z,z_\alpha)\,dJ(z,\zeta_\alpha) \\ -&\int_{a_1^-} J(z,z_\alpha)\,dJ(z,\zeta_\alpha) + \int_{b_1^+} J(z,z_\alpha)\,dJ(z,\zeta_\alpha) \end{aligned}$$

sein, worin die über die Querschnitte auszuführenden Integrationen in der Richtung der bezeichneten Pfeile zu nehmen sind, oder

$$\begin{aligned} &\int_{a_1} [J^+(z,z_\alpha) - J^-(z,z_\alpha)]\,dJ(z,\zeta_\alpha) + \int_{a_2} [J^+(z,z_\alpha) - J^-(z,z_\alpha)]\,dJ(z,\zeta_\alpha) + \cdots \\ +&\int_{b_1} [J^+(z,z_\alpha) - J^-(z,z_\alpha)]\,dJ(z,\zeta_\alpha) + \int_{b_2} [J^+(z,z_\alpha) - J^-(z,z_\alpha)]\,dJ(z,\zeta_\alpha) + \cdots, \end{aligned}$$

da die Function $\dfrac{dJ(z,\zeta_\alpha)}{dz}$ auf beiden Seiten der Querschnitte denselben Werth hat, oder endlich mit Hülfe der obigen Beziehungen, da

$$\begin{aligned} &\text{längs dem Querschnitte } a_k: \ J^+(z,z_\alpha) - J^-(z,z_\alpha) = J_{a_k}, \\ &\text{längs dem Querschnitte } b_k: \ J^+(z,z_\alpha) - J^-(z,z_\alpha) = -J_{b_k}, \end{aligned}$$

ferner

$$\int_{a_k} dJ(z,\zeta_\alpha) = I_{b_k}, \quad \int_{b_k} dJ(z,\zeta_\alpha) = I_{a_k}$$

ist, wenn die Richtung der Integrale in der Richtung der Pfeile der Figur genommen ist,

$$(6) \qquad \sum_{\nu=1}^{p} (J_{a_\nu} I_{b_\nu} - J_{b_\nu} I_{a_\nu}).$$

Da nun, wie aus den allgemeinen Principien bekannt ist, das Resultat der über die gesammte Begränzung genommenen Integration den Werth Null haben muss, so erhalten wir durch Zusammenfassung der oben gefundenen Ausdrücke (1) bis (6) die nachfolgende

Relation zwischen den Perioden der hyperelliptischen Integrale $J(z, z_\alpha)$ und $J(z, \zeta_\alpha)$:

$$
\begin{aligned}
(7)\qquad \frac{1}{2\pi i}\sum_{\nu=1}^{p}(J_{a_\nu} I_{b_\nu} - J_{b_\nu} I_{a_\nu}) = &-\sum_{\varrho=1}^{\mu}\Big[n_1^{(\varrho)}\mathfrak{B}_\varrho + 2n_2^{(\varrho)}\mathfrak{C}_\varrho + \cdots + \mathfrak{k}_\varrho n_{\mathfrak{k}_\varrho}^{(\varrho)}\mathfrak{K}_\varrho \\
&\quad + m_0^{(\varrho)}\mathfrak{A}'_\varrho - m_1^{(\varrho)}\mathfrak{B}'_\varrho - 2m_2^{(\varrho)}\mathfrak{C}_\varrho - \cdots - \mathfrak{k}'_\varrho m_{\mathfrak{k}'_\varrho}^{(\varrho)}\mathfrak{K}'_\varrho\Big] \\
&- \sum_{\varrho=1}^{n}\Big[p_0^{(\varrho)}A'_\varrho - p_1^{(\varrho)}B'_\varrho - 2p_2^{(\varrho)}C'_\varrho - \cdots - k'_\varrho p_{k'_\varrho}^{(\varrho)}K'_\varrho\Big] \\
&- \sum_{\varrho=1}^{m}\Big[\pi_1^{(\varrho)}B_\varrho + 2\pi_2^{(\varrho)}C_\varrho + \cdots + k_\varrho \pi_{k_\varrho}^{(\varrho)}K_\varrho\Big] + \sum_{\varrho=1}^{m}A_\varrho\int_A^{z_\varrho} dJ(z,\zeta_\alpha) \\
&- \sum_{\varrho=1}^{2p+1}\Big[b_\varrho\nu_1^{(\varrho)} + 2c_\varrho\nu_2^{(\varrho)} + \cdots + \lambda_\varrho h_\varrho \nu_{\lambda_\varrho}^{(\varrho)} \\
&\qquad + a'_\varrho\mu_0^{(\varrho)} - b'_\varrho\mu_1^{(\varrho)} - 2c'_\varrho\mu_2^{(\varrho)} - \cdots - \lambda'_\varrho h'_\varrho \mu_{\lambda'_\varrho}^{(\varrho)}\Big] \\
&+ \sum_{\varrho=1}^{2p+1} a_\varrho \int_A^{\alpha_\varrho} dJ(z,\zeta_\alpha) - 2\pi i\sum_{\varrho=1}^{2p+1} a'_\varrho(A_1 + A_2 + \cdots \\
&\qquad + A_m + a_1 + a_1 + \cdots + a_{\varrho-1}) \\
&- \big[P_0M'_0 + P_1M'_1 + P_2M'_2 + 3P_3M'_3 + \cdots \\
&\qquad + \delta' P_{\delta'}M'_{\delta'} - P'_1M_1 - 2P'_2M_2 - \cdots - \delta P'_\delta M_\delta\big] \\
&- 2\pi i M'_0(A_1 + A_2 + \cdots + A_m + a_1 + a_2 + \cdots + a_{2p+1}) \\
&- M_0\int_A^{\infty} dJ(z,\zeta_\alpha),
\end{aligned}
$$

wobei zu bemerken, dass für die Integrale $J(z, z_\alpha)$ und $J(z, \zeta_\alpha)$ die Bedingung gestellt worden, dass

$$\mathfrak{A}_1 = \mathfrak{A}_2 = \ldots = \mathfrak{A}_\mu = 0$$

ist, und dass, wenn a_ϱ, oder M_0 von Null verschieden,

$$a'_\varrho = b'_\varrho = \ldots = h'_\varrho = 0 \text{ resp. } M'_0 = M'_1 = \ldots = M'_{\delta'} = 0$$

anzunehmen sind.

Dass sich die Integrale

$$\sum_{\varrho=1}^{m} A_\varrho\int_A^{z_\varrho} dJ(z,\zeta_\alpha),\qquad \sum_{\varrho=1}^{2p+1} a_\varrho\int_A^{\alpha_\varrho} dJ(z,\zeta_\alpha),\qquad -M_0\int_A^{\infty} dJ(z,\zeta_\alpha)$$

vermöge der Beziehung

$$A_1 + \cdots + A_m + a_1 + \cdots + a_{2p+1} - M_0 = 0$$

zu Integralen zusammensetzen, welche von dem willkürlich angenommenen Querschnittspunkte A unabhängig sind und auf der einfach zusammenhängenden Riemann'schen Fläche zwischen den singulären Punkten verlaufen, bedarf keiner weitern Auseinandersetzung.

Specialisiren wir die gefundene Periodenrelation (7), indem wir $J(z, z_\alpha)$ und $J(z, \zeta_\alpha)$ hyperelliptische Integrale dritter Gattung bedeuten lassen und mit

$$\Pi(z, z_1, z_2) \text{ und } \Pi(z, \zeta_1, \zeta_2)$$

bezeichnen, wobei wir annehmen, dass das Werthesystem z_1, z_2 von ζ_1, ζ_2 verschieden ist, und diese vier Punkte nicht Verzweigungspunkte sind, so werden alle in den obigen Unstetigkeitsfunctionen der allgemeinen Integrale vorkommenden Constanten mit Ausnahme von A_1, A_2, A'_1, A'_2 gleich Null zu setzen sein, und zwischen diesen letzteren Constanten werden die Beziehungen stattfinden müssen

$$A_1 + A_2 = 0, \quad A'_1 + A'_2 = 0;$$

in Folge dessen geht die Periodenrelation (7), wenn die Periodicitätsmoduln der beiden dritten Integrale mit

$$P_{a_k}, \quad P_{b_k}, \quad \Pi_{a_k}, \quad \Pi_{b_k}$$

bezeichnet werden, in

$$(8) \qquad \frac{1}{2\pi i}\sum_{\nu=1}^{p}(P_{a_\nu}\Pi_{b_\nu} - P_{b_\nu}\Pi_{a_\nu}) = -p_0^{(1)}A'_1 - p_0^{(2)}A'_2 + A_1\int_A^{z_1} d\Pi(z, \zeta_1, \zeta_2) + A_2\int_A^{z_2} d\Pi(z, \zeta_1, \zeta_2),$$

oder vermöge der aus den obigen Reihenentwicklungen hervorgehenden Bedeutung der Grössen $p_0^{(1)}$ und $p_0^{(2)}$, nämlich

$$p_0^{(1)} = \Pi(\zeta_1, z_1, z_2), \quad p_0^{(2)} = \Pi(\zeta_2, z_1, z_2)$$

in

$$(9) \qquad \frac{1}{2\pi i}\sum_{\nu=1}^{p}(P_{a_\nu}\Pi_{b_\nu} - P_{b_\nu}\Pi_{a_\nu}) = A_2\int_{z_1}^{z_2} d\Pi(z, \zeta_1, \zeta_2) + A'_2\int_{\zeta_1}^{\zeta_2} d\Pi(z, z_1, z_2),$$

über.

Lässt man nunmehr die beiden Integrale dritter Gattung zu Hauptintegralen werden, in welchem Falle wir $A_2 = A'_2 = -1$ zu setzen haben, und bezeichnet die Perioden dieser Integrale

$$H(z, z_1, z_2) \text{ und } H(z, \zeta_1, \zeta_2)$$

mit

$$H_{a_\nu}, \quad H_{b_\nu}, \quad H'_{a_\nu}, \quad H'_{b_\nu},$$

so ergiebt sich

$$\int_{\zeta_1}^{\zeta_2} dH(z, z_1, z_2), - \int_{z_1}^{z_2} dH(z, \zeta_1, \zeta_2) = \frac{1}{2\pi i} \sum_{\nu=1}^{p} \left(H_{a_\nu} H'_{b_\nu} - H_{b_\nu} H'_{a_\nu}\right), \tag{10}$$

und *es liefern somit zwei Hauptintegrale dritter Gattung, bei denen die Gränzen des einen die Parameter des andern sind, und die Integrationswege nur den oben angegebenen Beschränkungen unterliegen, eine nur von den Periodicitätsmoduln abhängige Differenz.*

Die Hinzufügung von Integralen erster Gattung lässt diesen Integralen noch den Charakter der Hauptintegrale, und wenn wir die Periodicitätsmoduln der p Integrale erster Gattung

$$\int \frac{dz}{\sqrt{R(z)}}, \quad \int \frac{z\,dz}{\sqrt{R(z)}}, \dots \int \frac{z^{p-1} dz}{\sqrt{R(z)}}$$

an dem Querschnitte a_k mit

$$A_k^{(0)}, \quad A_k^{(1)}, \ \dots \ A_k^{(p-1)},$$

an dem Querschnitte b_k mit

$$B_k^{(0)}, \quad B_k^{(1)}, \ \dots \ B_k^{(p-1)},$$

bezeichnen, so werden, wenn diese Integrale mit den Constanten

$$\begin{array}{c} c_0, \ c_1, \ \dots \ c_{p-1} \\ c'_0, \ c'_1, \ \dots \ c'_{p-1} \end{array}$$

multiplicirt zu den beiden Hauptintegralen hinzugefügt werden, die Periodicitätsmoduln der neuen Hauptintegrale an dem Querschnitte a_k durch

$$H_{a_k} + c_0 A_k^{(0)} + c_1 A_k^{(1)} + \dots + c_{p-1} A_k^{(p-1)}$$

und

$$H'_{a_k} + c'_0 A_k^{(0)} + c'_1 A_k^{(1)} + \dots + c'_{p-1} A_k^{(p-1)},$$

an dem Querschnitte b_k durch

$$H_{b_k} + c_0 B_k^{(0)} + c_1 B_k^{(1)} + \dots + c_{p-1} B_k^{(p-1)}$$

und

$$H'_{b_k} + c'_0 B_k^{(0)} + c'_1 B_k^{(1)} + \dots + c'_{p-1} B_k^{(p-1)}$$

ausgedrückt sein, und es wird daher für diese die rechte Seite der Gleichung (10) in

$$\begin{aligned}\frac{1}{2\pi i}\sum_{\nu=1}^{p}\Big\{&\Big(H_{a_\nu}+c_0A_\nu^{(0)}+c_1A_\nu^{(1)}+\cdots+c_{p-1}A_\nu^{(p-1)}\Big)\\ &\times\Big(H'_{b_\nu}+c'_0B_\nu^{(0)}+c'_1B_\nu^{(1)}+\cdots+c'_{p-1}B_\nu^{(p-1)}\Big)\\ &-\Big(H_{b_\nu}+c_0B_\nu^{(0)}+c_1B_\nu^{(1)}+\cdots+c_{p-1}B_\nu^{(p-1)}\Big)\\ &\times\Big(H'_{a_\nu}+c'_0A_\nu^{(0)}+c'_1A_\nu^{(1)}+\cdots+c'_{p-1}A_\nu^{(p-1)}\Big)\Big\}\end{aligned}$$

übergehen. Nun kann man aber

$$c_0,\ c_1,\ \ldots\ c_{p-1},\ c'_0,\ c'_1,\ \ldots\ c'_{p-1}$$

so wählen, dass

$$\begin{aligned}&H_{a_1}+c_0A_1^{(0)}+c_1A_1^{(1)}+\cdots+c_{p-1}A_1^{(p-1)}=0\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ &H_{a_p}+c_0A_p^{(0)}+c_1A_p^{(1)}+\cdots+c_{p-1}A_p^{(p-1)}=0\\ &H'_{a_1}+c'_0A_1^{(0)}+c'_1A_1^{(1)}+\cdots+c'_{p-1}A_1^{(p-1)}=0\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ &H'_{a_p}+c'_0A_p^{(0)}+c'_1A_p^{(1)}+\cdots+c'_{p-1}A_p^{(p-1)}=0,\end{aligned}$$

oder dass die beiden neuen Hauptintegrale dritter Gattung an den a-Querschnitten den Periodicitätsmodul Null haben; denn diese Bestimmung würde nur dann unmöglich werden, wenn die Determinante

$$\begin{vmatrix}A_1^{(0)} & A_1^{(1)} & \ldots & A_1^{(p-1)}\\ \vdots & & & \\ A_p^{(0)} & A_p^{(1)} & \ldots & A_p^{(p-1)}\end{vmatrix}=0$$

würde, und dass dies nicht der Fall sein kann, folgt wiederum wie früher, da sich sonst ein Integral erster Gattung bestimmen lassen würde, für welches alle an den a-Querschnitten stattfindenden Sprünge verschwinden, was oben als unstatthaft nachgewiesen worden. Werden nun diese neuen Hauptintegrale mit

$$H_0(z,z_1,z_2)\text{ und }H_0(z,\zeta_1,\zeta_2)$$

bezeichnet, so geht die Gleichung (10) in

(11) $$\int_{\zeta_1}^{\zeta_2} dH_0(z, z_1, z_2) = \int_{z_1}^{z_2} dH_0(z, \zeta_1, \zeta_2)$$

über. Bemerkt man ferner, dass jetzt die beiden Hauptintegrale $H_0(z, z_1, z_2)$ und $H_0(z, \zeta_1, \zeta_2)$ sich nur durch die verschiedene Lage ihrer Unstetigkeitspunkte unterscheiden, indem sie dieselben p verschwindenden Periodicitätsmoduln haben, und durch die Art der Unstetigkeit sowie durch p Periodicitätsmoduln an der Reihe der a- oder der Reihe der b-Querschnitte ein hyperelliptisches Integral bis auf eine additive Constante vollständig bestimmt war, so folgt,

> *dass sich ein solches Hauptintegral nicht ändert, wenn die Gränzen mit den Unstetigkeitspunkten vertauscht werden.*

Es mag zur Charakteristik der obigen Hauptintegrale, für welche die p Periodicitätsmoduln an den a-Querschnitten verschwinden, noch bemerkt werden, dass die Ausdrücke für die andern Periodicitätsmoduln sich leicht mit Hülfe von Integralen erster Gattung darstellen lassen. Setzt man nämlich in die oben erhaltene Beziehung (7) $J(z, \zeta_\alpha)$ gleich einem Integrale erster Gattung $J(z)$, dessen Periodicitätsmoduln mit J_{a_ν} und J_{b_ν} bezeichnet werden mögen, während $J(z, z_\alpha) = \Pi(z, z_1, z_2)$ ein Integral dritter Gattung bedeuten soll, so folgt

$$\frac{1}{2\pi i} \sum_{\nu=1}^{p} (\Pi_{a_\nu} J_{b_\nu} - \Pi_{b_\nu} J_{a_\nu}) = A_2 \int_{z_1}^{z_2} dJ(z),$$

oder wenn $\Pi(z, z_1, z_2)$ ein Hauptintegral dritter Gattung vorstellt, also $A_2 = -1$ ist,

$$\frac{1}{2\pi i} \sum_{\nu=1}^{p} (H_{a_\nu} J_{b_\nu} - H_{b_\nu} J_{a_\nu}) = -\int_{z_1}^{z_2} dJ(z).$$

Soll nun $H(z, z_1, z_2)$ wieder ein solches Hauptintegral sein, für welches alle Periodicitätsmoduln an den a-Querschnitten verschwinden, so bleibt

$$\frac{1}{2\pi i} \sum_{\nu=1}^{p} H_{b_\nu} J_{a_\nu} = \int_{z_1}^{z_2} dJ(z),$$

und bestimmen wir nunmehr ein erstes Integral $J_r(z)$ dergestalt, dass die Periodicitätsmoduln desselben an allen a-Querschnitten verschwinden ausser an dem Querschnitte a_r, an welchem der Periodicitätsmodul $2\pi i$ sein soll (wie ein solches zu bestimmen, ergiebt sich aus dem Früheren, indem man nur die p Fundamentalintegrale erster Gattung mit solchen Constanten zu multipliciren braucht, dass diese Bedingungen erfüllt werden, wodurch sich ebensoviele lineare Gleichungen als zu bestimmende Constanten ergeben), so geht die obige Gleichung in

$$H_{b_r} = \int_{z_1}^{z_2} dJ_r(z)$$

über, und es drücken sich somit die nicht verschwindenden Periodicitätsmoduln des Hauptintegrals an den Querschnitten b durch Integrale erster Gattung aus, welche zwischen den Unstetigkeitspunkten z_1 und z_2 als Gränzen genommen sind, und für welche alle Periodicitätsmoduln an den a-Querschnitten verschwinden, nur an einem derselben den Werth $2\pi i$ haben.

Eine weitere Specialisirung der oben gefundenen Beziehung (7) für den Fall, dass $J(z, z_\alpha)$ und $J(z, \zeta_\alpha)$ Integrale erster Gattung von der Form

$$J^{(\alpha)}(z) = \int \frac{z^{p-\alpha-1}dz}{\sqrt{R(z)}}, \quad J^{(\beta)}(z) = \int \frac{z^{p-\beta-1}dz}{\sqrt{R(z)}}$$

bedeuten, in denen α und β Zahlen aus der Reihe 0, 1, 2, ... $p-1$ vorstellen, ergiebt, wenn die Periodicitätsmoduln dieser Integrale an den Querschnitten a_ν und b_ν resp. mit

$$J_{a_\nu}^{(\alpha)}, \quad J_{b_\nu}^{(\alpha)}, \quad J_{a_\nu}^{(\beta)}, \quad J_{b_\nu}^{(\beta)}$$

bezeichnet werden, die Beziehung

$$\sum_{\nu=1}^{p} \left(J_{a_\nu}^{(\alpha)} J_{b_\nu}^{(\beta)} - J_{b_\nu}^{(\alpha)} J_{a_\nu}^{(\beta)} \right) = 0, \tag{12}$$

von der bei der Einführung der ϑ-Functionen in die Theorie der hyperelliptischen Integrale weiterer Gebrauch gemacht wird.

Betrachten wir ferner noch den speciellen Fall, in welchem ein Integral erster Gattung

$$J^{(\beta)}(z) = \int \frac{z^{p-\beta-1}dz}{\sqrt{R(z)}}$$

mit einem Integrale von der Form

$$E^{(\alpha)}(z) = \int \frac{z^{p+\alpha}dz}{\sqrt{R(z)}}$$

zusammengestellt wird, in welchem $\alpha = 0, 1, 2, \ldots p-1$, und welches, wie wir früher gesehen haben, in dem Verzweigungspunkte $z = \infty$ und nur in diesem Punkte von der $2\alpha + 1^{\text{ten}}$

Ordnung unendlich wird. Für diesen Fall wird, wenn die Perioden der Integrale an den Querschnitten a_ν und b_ν resp. mit

$$J_{a_\nu}^{(\beta)}, \quad J_{b_\nu}^{(\beta)}, \quad E_{a_\nu}^{(\alpha)}, \quad E_{b_\nu}^{(\alpha)}$$

bezeichnet werden, die Gleichung (7) eine leicht zu übersehende Form annehmen; es folgt unmittelbar mit Hülfe der oben für die Entwicklungscoefficienten in der Umgebung des unendlich entfernten Punktes gebrauchten Bezeichnungen

$$\begin{aligned}E^{(\alpha)}(z) = & M_{2\alpha+1}z^{\frac{2\alpha+1}{2}} + M_{2\alpha-1}z^{\frac{2\alpha-1}{2}} + M_{2\alpha-3}z^{\frac{2\alpha-3}{2}} + \cdots + M_1 z^{\frac{1}{2}} + \cdots \\ J^{(\beta)}(z) = & P'_{2\beta+1}z^{\frac{-2\beta-1}{2}} + P'_{2\beta+3}z^{\frac{-2\beta-3}{2}} + P'_{2\beta+5}z^{\frac{-2\beta-5}{2}} + \cdots ,\end{aligned}$$

worin, wenn die Entwicklung von

$$\frac{1}{\sqrt{R(z)}}$$

in der Umgebung des unendlich entfernten Punktes mit

$$\frac{1}{\sqrt{R(z)}} = z^{-p-\frac{1}{2}}\left\{f_0 + f_1 z^{-1} + f_2 z^{-2} + \cdots\right\}.$$

bezeichnet wird,

$$M_{2\alpha+1} = \frac{2f_0}{2\alpha+1}, \quad M_{2\alpha-1} = \frac{2f_1}{2\alpha-1}, \quad M_{2\alpha-3} = \frac{2f_2}{2\alpha-3}, \dots$$

und

$$P'_{2\beta+1} = -\frac{2f_0}{2\beta+1}, \quad P'_{2\beta+3} = -\frac{2f_1}{2\beta+3}, \quad P'_{2\beta+5} = -\frac{2f_2}{2\beta+5}, \dots$$

sind, und hieraus ergiebt sich, dass, wenn
I. $\alpha \geqq \beta$,

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2\pi i}\sum_{\nu=1}^{p}\left(E^{(\alpha)}_{a_\nu}J^{(\beta)}_{b_\nu} - E^{(\alpha)}_{b_\nu}J^{(\beta)}_{a_\nu}\right) \\ &= (2\beta+1)P'_{2\beta+1}M_{2\beta+1} + (2\beta+3)P'_{2\beta+3}M_{2\beta+3} + \cdots + (2\alpha+1)P'_{2\alpha+1}M_{2\alpha+1}\end{aligned}$$

und wenn
II. $\alpha < \beta$;

$$\sum_{\nu=1}^{p}\left(E^{(\alpha)}_{a_\nu}J^{(\beta)}_{b_\nu} - E^{(\alpha)}_{b_\nu}J^{(\beta)}_{a_\nu}\right) = 0$$

ist.

Es mag endlich noch eine Beziehung zwischen den Periodicitätsmoduln von mehr als zwei zu derselben Irrationalität gehörigen hyperelliptischen Integralen entwickelt werden und zwar eine solche, welche die Perioden der in der Reductionsformel des allgemeinen hyperelliptischen Integrales vorkommenden Integrale erster und zweiter Gattung mit einander verbindet, aus der in Vereinigung mit den früheren sich weitere Relationen herstellen lassen.

Legt man die Integrale erster Gattung in der Form

$$J^{(\varrho)}(z) = \int \frac{z^\varrho dz}{\sqrt{R(z)}}$$

zu Grunde, worin $\varrho = 0, 1, 2, \ldots p-1$ sein soll, und bezeichnet deren Periodicitätsmoduln mit

$$J_{a_k}^{(\varrho)} \quad \text{und} \quad J_{b_k}^{(\varrho)},$$

so dass

$$\begin{aligned} J_{a_k}^{(\varrho)} &= -2\int_{\alpha_{2k}}^{\alpha_{2k+1}} dJ^{(\varrho)}(z) - 2\int_{\alpha_{2k+2}}^{\alpha_{2k+3}} dJ^{(\varrho)}(z) - \cdots - 2\int_{\alpha_{2p}}^{\alpha_{2p+1}} dJ^{(\varrho)}(z) \\ J_{b_k}^{(\varrho)} &= -2\int_{\alpha_{2k-1}}^{\alpha_{2k}} dJ^{(\varrho)}(z), \end{aligned}$$

worin die in $J_{a_k}^{(\varrho)}$ vorkommende Grösse

$$dJ^{(\varrho)}(z)$$

für die gradlinigen Integrale die im oberen Blatte genommenen Werthe, die in $J_{b_k}^{(\varrho)}$ vorkommende die auf der oberen Seite des Verzweigungsschnittes in eben diesem Blatte genommenen Werthe dieser Function annehmen soll; setzt man ferner die Integrale zweiter Gattung, wie sie in erweiterter Bedeutung in die Reductionsformel des allgemeinen hyperelliptischen Integrales in der vorigen Vorlesung eingeführt worden, in die Form

$$E^{(\sigma)}(z) = \int \frac{z^\sigma dz}{\sqrt{R(z)}},$$

worin $\sigma = p, p+1, \ldots 2p-1$ sein soll, und bezeichnet deren Periodicitätsmoduln mit

$$E_{a_k}^{(\sigma)} \text{ und } E_{b_k}^{(\sigma)}$$

so dass wie oben

$$\begin{aligned} E_{a_k}^{(\sigma)} &= -2\int_{\alpha_{2k}}^{\alpha_{2k+1}} dE^{(\sigma)}(z) - 2\int_{\alpha_{2k+2}}^{\alpha_{2k+3}} dE^{(\sigma)}(z) - \cdots - 2\int_{\alpha_{2p}}^{\alpha_{2p+1}} dE^{(\sigma)}(z) \\ E_{b_k}^{(\sigma)} &= -2\int_{\alpha_{2k-1}}^{\alpha_{2k}} dE^{(\sigma)}(z), \end{aligned}$$

worin

$$dE^{(\sigma)}(z)$$

genau in der für die Integrale erster Gattung angegebenen Weise zu bestimmen ist, so sieht man unmittelbar, dass die Determinante

$$\begin{vmatrix} J_{b_1}^{(0)} & J_{a_1}^{(0)} & J_{b_2}^{(0)} & J_{a_2}^{(0)} & \dots & J_{b_p}^{(0)} & J_{a_p}^{(0)} \\ J_{b_1}^{(1)} & J_{a_1}^{(1)} & J_{b_2}^{(1)} & J_{a_2}^{(1)} & \dots & J_{b_p}^{(1)} & J_{a_p}^{(1)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ J_{b_1}^{(p-1)} & J_{a_1}^{(p-1)} & J_{b_2}^{(p-1)} & J_{a_2}^{(p-1)} & \dots & J_{b_p}^{(p-1)} & J_{a_p}^{(p-1)} \\ E_{b_1}^{(p)} & E_{a_1}^{(p)} & E_{b_2}^{(p)} & E_{a_2}^{(p)} & \dots & E_{b_p}^{(p)} & E_{a_p}^{(p)} \\ E_{b_1}^{(p+1)} & E_{a_1}^{(p+1)} & E_{b_2}^{(p+1)} & E_{a_2}^{(p+1)} & \dots & E_{b_p}^{(p+1)} & E_{a_p}^{(p+1)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ E_{b_1}^{(2p-1)} & E_{a_1}^{(2p-1)} & E_{b_2}^{(2p-1)} & E_{a_2}^{(2p-1)} & \dots & E_{b_p}^{(2p-1)} & E_{a_p}^{(2p-1)} \end{vmatrix} = D$$

mit Hülfe der eben angegebenen Werthe der Periodicitätsmoduln in

$$D = 2^{2p} \begin{vmatrix} \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \frac{dz}{\sqrt{R(z)}} & \int_{\alpha_2}^{\alpha_3} \frac{dz}{\sqrt{R(z)}} & \dots & \int_{\alpha_{2p}}^{\alpha_{2p+1}} \frac{dz}{\sqrt{R(z)}} \\ \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \frac{z\,dz}{\sqrt{R(z)}} & \int_{\alpha_2}^{\alpha_3} \frac{z\,dz}{\sqrt{R(z)}} & \dots & \int_{\alpha_{2p}}^{\alpha_{2p+1}} \frac{z\,dz}{\sqrt{R(z)}} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \frac{z^{2p-1}dz}{\sqrt{R(z)}} & \int_{\alpha_2}^{\alpha_3} \frac{z^{2p-1}dz}{\sqrt{R(z)}} & \dots & \int_{\alpha_{2p}}^{\alpha_{2p+1}} \frac{z^{2p-1}dz}{\sqrt{R(z)}} \end{vmatrix}$$

übergeht.

Wir wollen uns nun mit der Ermittelung des Werthes dieser letzteren Determinante beschäftigen und zuerst nachweisen,

dass dieselbe als Function der Lösungen

$$\alpha_1,\ \alpha_2,\ \dots\ \alpha_{2p+1}$$

aufgefasst für alle Werthe derselben eine eindeutige Function dieser Grössen ist.

Betrachten wir z. B. die Determinante als Function von α_1 und untersuchen die Eigenschaften der einzelnen in derselben vorkommenden Integrale als Functionen dieser

Grösse, oder fragen, welche Aenderung

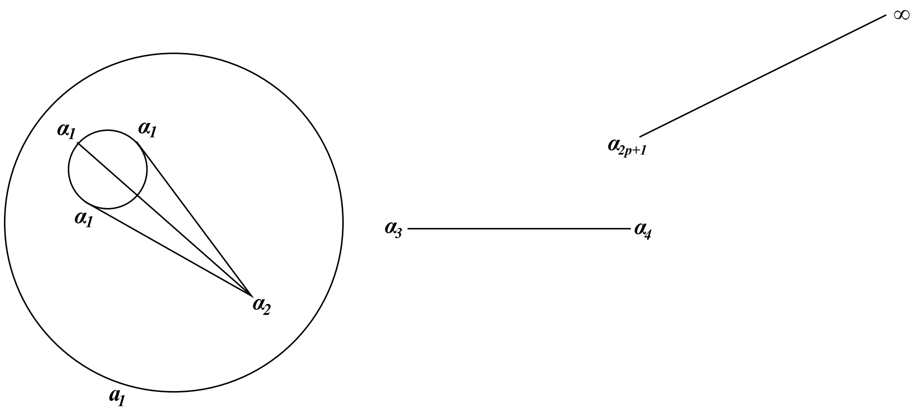
$$J = \int_{\alpha_r}^{\alpha_{r+1}} \frac{z^3\,dz}{\sqrt{(z-\alpha_1)(z-\alpha_2)\cdots(z-\alpha_{2p+1})}}$$

erleiden wird, wenn α_1 einen unendlich kleinen Umkreis an einer beliebigen Stelle der Ebene beschreibt. Sei zuerst dieser Umkreis *nicht* um einen der Verzweigungspunkte

$$\alpha_2,\ \alpha_3,\ \ldots\ \alpha_{2p+1}$$

gezogen, so beachte man, dass jeder andern Lage von α_1 auf der unendlich kleinen geschlossenen Curve eine andere Riemann'sche Fläche entspricht, die sich von der gegebenen nur durch eine unendlich wenig veränderte Lage des ersten Verzweigungsschnittes

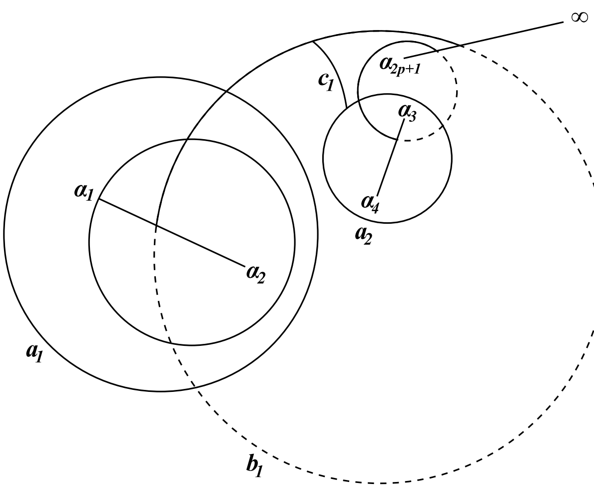
Fig. 4.



unterscheidet, so dass wir also auch alle Querschnitte unverändert beibehalten können, und da das gradlinig genommene Integral J sich bei der stetigen Bewegung des Punktes α_1 wie unmittelbar zu sehen, immer nur um unendlich wenig von seinem anfänglichen Werthe unterscheiden kann, so wird der Werth des Integrales nach einem ganzen Umlaufe unverändert geblieben sein, so dass also J seinen Werth wieder erreicht, wenn α_1 einen unendlich kleinen Umlauf um einen beliebigen Punkt in der Ebene beschreibt, der nicht einer der andern Verzweigungspunkte ist.

Liegt dagegen α_1 in der Nähe eines Verzweigungspunktes α_λ, so denke man sich die Construction der Riemann'schen Fläche und die Verwandlung derselben in eine einfach zusammenhängende derart ausgeführt, dass man α_λ als zweiten Verzweigungspunkt betrachtet und also $\alpha_1\alpha_\lambda$ als ersten Verzweigungsschnitt ansieht; es wird dies für die Betrachtung des absoluten Werthes der oben charakterisirten Determinante gleichgültig sein, weil wir nur mehrere Verticalreihen der Determinante zu vertauschen und mit einander additiv zu verbinden haben. Dann ist aber unmittelbar aus der Figur zu

Fig. 5.

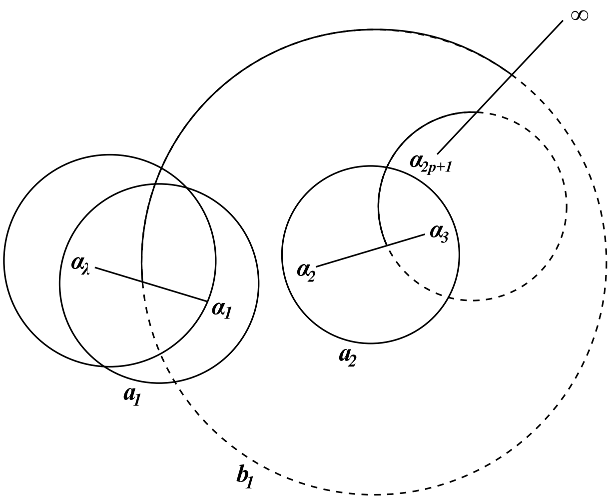


ersehen, dass, wenn α_1 einen sehr kleinen Umkreis um α_λ beschreibt, und die daraus hervorgehenden Integralwerthe durch einen Strich am Integralzeichen markirt werden, wegen Aenderung des Wurzelzeichens und Durchschneiden des Querschnittes b_1

$$\tag{13} {}'\!\!\int_{\alpha_1}^{\alpha_\lambda} \frac{z^3\,dz}{\sqrt{R(z)}} = -\int_{\alpha_1}^{\alpha_\lambda} \frac{z^3\,dz}{\sqrt{R(z)}} - J_{b_1} = \int_{\alpha_1}^{\alpha_\lambda} \frac{z^3\,dz}{\sqrt{R(z)}}$$

wird, und dass ferner, weil bei der Umkreisung von α_λ durch α_1 auch einmal die Figur

Fig. 6.



die beistehende Gestalt hat, und der dem früheren gradlinigen Wege auf der ersten Riem a n n'schen Fläche entsprechende Weg auf der dieser Lage von α_1 entsprechenden R i e m a n n'schen Fläche den Querschnitt b_1 schneidet,

$$(14) \qquad {\int_{\alpha_\lambda}^{\alpha_2}}' \frac{z^3 dz}{\sqrt{R(z)}} = \int_{\alpha_\lambda}^{\alpha_2} \frac{z^3 dz}{\sqrt{R(z)}} - J_{b_1} = \int_{\alpha_\lambda}^{\alpha_2} \frac{z^3 dz}{\sqrt{R(z)}} + 2 \int_{\alpha_1}^{\alpha_\lambda} \frac{z^3 dz}{\sqrt{R(z)}}$$

ist; endlich lässt sich leicht erkennen, dass sich

$$(15) \qquad {\int_{\alpha_r}^{\alpha_{r+1}}}' \frac{z^3 dz}{\sqrt{R(z)}} = \int_{\alpha_r}^{\alpha_{r+1}} \frac{z^3 dz}{\sqrt{R(z)}}$$

ergiebt.

Aus den Beziehungen (13), (14), (15) sehen wir aber unmittelbar, dass eine Umkreisung von α_λ für die Determinante, als Function von α_1 aufgefasst, keine Veränderung der Function hervorbringt, da die einzelnen Integrale immer nur um die entsprechenden Integrale der anderen Verticalreihen zunehmen oder auch unverändert bleiben, und ebenso unmittelbar folgt, dass eine Umkreisung des unendlich entfernten Punktes keine Veränderung des Werthes der Determinante verursacht.

Somit ergiebt sich die obige Determinante als *eindeutige* Function der Grössen α_1, $\alpha_2, \ldots \alpha_{2p+1}$, und *muss daher nach einem bekannten Satze der Functionentheorie auch einmal verschwinden, wenn sie nicht etwa eine Constante, d. h. eine von* $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_{2p+1}$ *unabhängige Grösse ist. Dass aber diese Determinante nicht verschwinden kann*, sieht man leicht aus folgender Ueberlegung. Wäre dies nämlich der Fall für irgend ein Werthesystem der Grössen $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_{2p+1}$, so müsste sich ein System von $2p$ constanten Grössen

$$l^{(0)}, \ l^{(1)}, \ \ldots \ l^{(p-1)}, k^{(p)}, \ k^{(p+1)}, \ \ldots \ k^{(2p-1)}$$

bestimmen lassen, welche das homogene lineare Gleichungssystem

$$\begin{gathered}
k^{(2p-1)} J_{a_1}^{(0)} + k^{(2p-2)} J_{a_1}^{(1)} + \cdots + k^{(p)} J_{a_1}^{(p-1)} + l^{(p-1)} E_{a_1}^{(p)} + l^{(p-2)} E_{a_1}^{(p+1)} + \cdots + l^{(0)} E_{a_1}^{(2p-1)} = 0, \\
k^{(2p-1)} J_{b_1}^{(0)} + k^{(2p-2)} J_{b_1}^{(1)} + \cdots + k^{(p)} J_{b_1}^{(p-1)} + l^{(p-1)} E_{b_1}^{(p)} + l^{(p-2)} E_{b_1}^{(p+1)} + \cdots + l^{(0)} E_{b_1}^{(2p-1)} = 0, \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
k^{(2p-1)} J_{a_p}^{(0)} + k^{(2p-2)} J_{a_p}^{(1)} + \cdots + k^{(p)} J_{a_p}^{(p-1)} + l^{(p-1)} E_{a_p}^{(p)} + l^{(p-2)} E_{a_p}^{(p+1)} + \cdots + l^{(0)} E_{a_p}^{(2p-1)} = 0, \\
k^{(2p-1)} J_{b_p}^{(0)} + k^{(2p-2)} J_{b_p}^{(1)} + \cdots + k^{(p)} J_{b_p}^{(p-1)} + l^{(p-1)} E_{b_p}^{(p)} + l^{(p-2)} E_{b_p}^{(p+1)} + \cdots + l^{(0)} E_{b_p}^{(2p-1)} = 0
\end{gathered}$$

befriedigen; dann würde aber das hyperelliptische Integral

$$\int \frac{k^{(2p-1)} + k^{(2p-2)} z + \cdots + k^{(p)} z^{p-1} + l^{(p-1)} z^p + l^{(p-2)} z^{p+1} + \cdots + l^{(0)} z^{2p-1}}{\sqrt{R(z)}} \, dz$$

an allen Querschnitten die Periodicitätsmoduln 0 besitzen und somit eine rationale Function von z und $\sqrt{R(z)}$ sein müssen; und dies kann offenbar nicht der Fall sein. Denn wäre

$$\int \frac{f(z)dz}{\sqrt{R(z)}} = \varphi_1(z) + \varphi_2(z)\sqrt{R(z)},$$

worin $f(z)$ eine ganze, $\varphi_1(z)$ und $\varphi_2(z)$ rationale Functionen von z bedeuten, so ist zuerst ersichtlich, dass

$$\varphi_1(z) = 0$$

sein muss, weil eine Veränderung des Zeichens von $\sqrt{R(z)}$ den Integralwerth in den entgegengesetzten verwandelt, und dass ferner $\varphi_2(z)$ eine ganze Function von z sein wird, weil das Integral der linken Seite für keinen endlichen Werth von z unendlich wird; wenn dann

$$\frac{f(z)}{\sqrt{R(z)}} = \frac{d}{dz}\left(\varphi_2(z)\sqrt{R(z)}\right) = \frac{d\varphi_2(z)}{dz}\sqrt{R(z)} + \varphi_2(z)\frac{R'(z)}{2\sqrt{R(z)}}$$

oder

$$f(z) = R(z)\frac{d\varphi_2(z)}{dz} + \frac{\varphi_2(z)}{2}R'(z)$$

gesetzt wird, so folgt leicht, dass der Grad der rechten Seite mindestens der $2p^{\text{te}}$ ist, weil, wenn

$$R(z) = Az^{2p+1} + \cdots$$
$$\varphi_2(z) = az^r + \cdots$$

ist, die höchsten Glieder von

$$R(z)\frac{d\varphi_2(z)}{dz}, \text{ nämlich } Aarz^{2p+r}$$

und von

$$\frac{\varphi_2(z)}{2}, \ R'(z), \text{ nämlich } \frac{a}{2}(2p+1)Az^{2p+r}$$

sich nicht wegheben können, da sonst

$$Aar - Aa\frac{2p+1}{2} = 0 \text{ oder } r = \frac{2p+1}{2}$$

wäre; da aber $f(z)$ nur vom $2p-1^{\text{ten}}$ Grade ist, so ist somit jene Gleichung nicht möglich, und also auch die Voraussetzung unstatthaft, dass es ein Werthesystem α_1, α_2, α_{2p+1} giebt, welches die Determinante verschwinden lässt.

Somit wird die Determinante eine constante, von den Verzweigungswerthen α_1, α_2, $\dots$ α_{2p+1} unabhängige Grösse sein, die wir also durch ein specielles Werthesystem derselben bestimmen können.

Wir wählen zu diesem Zwecke das Polynom

$$R(z) = z^{2p+1} - 1,$$

dessen Lösungen, wenn α eine primitive Wurzel bedeutet, durch

$$\alpha^0,\ \alpha^1,\ \alpha^2,\ \dots\ \alpha^{2p}$$

dargestellt werden, und es werden dann die einzelnen in der oben behandelten Determinante D enthaltenen Integrale von der Form sein

$$\int_{\alpha^r}^{\alpha^{r+1}} \frac{z^s dz}{\sqrt{z^{2p+1} - 1}},$$

worin r und s eine der Zahlen 0, 1, 2, … $2p-1$ bedeuten.

Da aber, wenn

$$z = \alpha^r x \text{ und } x = \alpha y$$

gesetzt wird,

$$\begin{aligned}
(16)\qquad \int_{\alpha^r}^{\alpha^{r+1}} \frac{z^s dz}{\sqrt{z^{2p+1} - 1}} &= \alpha^{r(s+1)} \int_1^{\alpha} \frac{x^s dx}{\sqrt{x^{2p+1} - 1}} \\
&= \alpha^{r(s+1)} \int_0^{\alpha} \frac{x^s dx}{\sqrt{x^{2p+1} - 1}} - \alpha^{r(s+1)} \int_0^1 \frac{x^s dx}{\sqrt{x^{2p+1} - 1}} \\
&= \alpha^{(r+1)(s+1)} \int_0^1 \frac{y^s dy}{\sqrt{y^{2p+1} - 1}} - \alpha^{r(s+1)} \int_0^1 \frac{x^s dx}{\sqrt{x^{2p+1} - 1}} \\
&= \alpha^{r(s+1)}(\alpha^{s+1} - 1) \int_0^1 \frac{x^s dx}{\sqrt{x^{2p+1} - 1}}
\end{aligned}$$

wird, so geht die Determinante der zwischen den einzelnen Verzweigungspunkten genommenen Integrale in

$$(17)\qquad \varDelta = \begin{vmatrix} 1 & \alpha & \alpha^2 & \dots & \alpha^{2p-1} \\ 1 & \alpha^2 & \alpha^4 & \dots & \alpha^{2(2p-1)} \\ 1 & \alpha^3 & \alpha^6 & \dots & \alpha^{3(2p-1)} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ 1 & \alpha^{2p} & \alpha^{4p} & \dots & \alpha^{2p(2p-1)} \end{vmatrix} \cdot \prod_{s=0,1,2\dots 2p-1} (\alpha^{s+1} - 1) \int_0^1 \frac{x^s dx}{\sqrt{x^{2p+1} - 1}}$$

über.

Nun ist die Determinante bekanntlich die Quadratwurzel aus der Discriminante der Gleichung

$$\frac{x^{2p+1}-1}{x-1} = x^{2p} + x^{2p-1} + \cdots + x + 1 = 0; \tag{18}$$

wenn man daher das Product der Quadrate der Differenzen aller Lösungen der Gleichung

$$x^{2p+1} - 1 = 0$$

durch den bekannten Ausdruck in den Potenzsummen darstellt, für welche

$$s_k = 0, \quad s_{(2p+1)r} = 2p+1$$

ist, so ergiebt sich für dasselbe unmittelbar der Werth

$$(-1)^p \; (2p+1)^{2p+1},$$

und wenn dieses durch das Quadrat des aus (18) hervorgehenden Ausdruckes

$$(1-\alpha)(1-\alpha^2)\cdots(1-\alpha^{2p}) = 2p+1$$

dividirt wird, so folgt als Werth jener Determinante

$$\sqrt{(-1)^p(2p+1)^{2p-1}}.$$

Um ferner das Product

$$\prod_{s=0,1,\ldots 2p-1} (\alpha^{s+1}-1) \int_0^1 \frac{x^s\,dx}{\sqrt{x^{2p+1}-1}}$$

zu ermitteln, kann man, um eine Anwendung der oben entwickelten Beziehungen zu geben, die sich genau ebenso für viele andere Integrale und ähnliche Untersuchungen durchführen lässt, unmittelbar von der früher entwickelten Periodenrelation zwischen beliebigen zu derselben Irrationalität gehörigen hyperelliptischen Integralen erster und zweiter Gattung, in der dort gewählten, von der gegenwärtigen verschiedenen Bezeichnungsweise derselben,

$$\frac{1}{2\pi i} \sum_{\nu=1}^{p} \left(E_{a_\nu}^{(\alpha)} J_{b_\nu}^{(\beta)} - E_{b_\nu}^{(\alpha)} J_{a_\nu}^{(\beta)} \right) =$$
$$(2\beta+1)P'_{2\beta+1}M_{2\beta+1} + (2\beta+3)P'_{2\beta+3}M_{2\beta+3} + \cdots + (2\alpha+1)P'_{2\alpha+1}M_{2\alpha+1} \qquad (\alpha \geqq \beta)$$

Gebrauch machen, indem sich, wie oben gezeigt worden, jedes zwischen zwei Verzweigungspunkten ausgedehnte Integral auf das Integral zwischen den Grenzen 0 und l zurückführen lässt; zur Vereinfachung der Rechnung wählen wir

$$\alpha = \beta = p - s - 1,$$

in welchem Falle, nach der oben gegebenen Bestimmung der Grössen M und P', sich

$$\frac{1}{2\pi i}\sum_{\nu=1}^{p}\left(E_{a_\nu}^{(\alpha)} J_{b_\nu}^{(\alpha)} - E_{b_\nu}^{(\alpha)} J_{a_\nu}^{(\alpha)}\right) = -\frac{2}{p-s-1}$$

ergiebt. Beachtet man, dass dann nach der Definition der Integrale erster und zweiter Gattung und mit Berücksichtigung der Beziehung (16)

$$\begin{aligned} J_{a_\nu}^{(\alpha)} &= -2\int_{\alpha^{2\nu-1}}^{\alpha^{2\nu}} \frac{z^s\,dz}{\sqrt{z^{2p+1}-1}} - 2\int_{\alpha^{2\nu+1}}^{\alpha^{2\nu+2}} \frac{z^s\,dz}{\sqrt{z^{2p+1}-1}} - \cdots - 2\int_{\alpha^{2p-1}}^{\alpha^{2p}} \frac{z^s\,dz}{\sqrt{z^{2p+1}-1}} \\ &= -2(\alpha^{s+1}-1)\big[\alpha^{(2\nu-1)(s+1)} + \alpha^{(2\nu+1)(s+1)} + \cdots \\ &\qquad\qquad + \alpha^{(2p-1)(s+1)}\big]\int_0^1 \frac{x^s\,dx}{\sqrt{x^{2p+1}-1}} \end{aligned}$$

$$J_{b_\nu}^{(\alpha)} = -2\int_{\alpha^{2\nu-2}}^{\alpha^{2\nu-1}} \frac{z^s\,dz}{\sqrt{z^{2p+1}-1}} = -2\alpha^{(2\nu-2)(s+1)}(\alpha^{s+1}-1)\int_0^1 \frac{x^s\,dx}{\sqrt{x^{2p+1}-1}},$$

ebenso

$$\begin{aligned} E_{a_\nu}^{(\alpha)} &= -2(\alpha^{2p-s}-1)\big[\alpha^{(2\nu-1)(2p-s)} + \alpha^{(2\nu+1)(2p-s)} + \cdots \\ &\qquad\qquad + \alpha^{(2p-1)(2p-s)}\big]\int_0^1 \frac{x^{2p-1-s}\,dx}{\sqrt{x^{2p+1}-1}} \\ E_{b_\nu}^{(\alpha)} &= -2\alpha^{(2\nu-2)(2p-s)}(\alpha^{2p-s}-1)\int_0^1 \frac{x^{2p-1-s}\,dx}{\sqrt{x^{2p+1}-1}} \end{aligned}$$

wird, so folgt aus der obigen Periodenrelation, wenn ausserdem das Product nach dem Index s über die Zahlen 0, 1, 2, … $p-1$ genommen wird,

$$\prod_{s=0,1,\ldots 2p-1}(\alpha^{s+1}-1)\int_0^1 \frac{x^s\,dx}{\sqrt{x^{2p+1}-1}} = \frac{(2\pi)^p\sqrt{2p+1}}{(2p+1)^p 1\cdot 3\cdots 2p-1},$$

welche Beziehung auch direct durch einfache Integralbetrachtungen hergeleitet werden kann, und daher für die Determinante der zwischen den Verzweigungswerthen genommenen Integrale nach Gleichung (17) der Werth

$$\varDelta = \frac{(-1)^{\frac{p}{2}}(2\pi)}{1\cdot 3\cdots(2p-1)},$$

oder endlich für die oben zu Grunde gelegte *Determinante aus den Periodicitätsmoduln der zu einer beliebigen Irrationalität gehörigen hyperelliptischen Integrale erster und zweiter Gattung der Ausdruck*

$$D = \frac{(-1)^{\frac{p}{2}} 2^{3p} \pi^p}{1 \cdot 3 \cdots (2p-1)}.$$

Sechste Vorlesung.

Das Abel'sche Theorem.

Nachdem die Relationen untersucht worden, welche zwischen den Periodicitätsmoduln verschiedener, zu derselben Riemann'schen Fläche gehöriger hyperelliptischer Integrale bestehen, gehen wir zu den Beziehungen zwischen allgemeinen hyperelliptischen Integralen über und besprechen zuerst den Satz von der Addition gleichartiger Integrale oder das *Abel'sche Theorem* in einer Form, wie wir dasselbe späteren Untersuchungen zu Grunde legen.

Sei $R(z)$ ein Polynom $2p+1^{\text{ten}}$ Grades in z, und werde die Gleichung

$$s^2 - R(z) = 0 \tag{1}$$

mit einer beliebigen andern algebraischen Gleichung zwischen s und z

$$f(s,z) = 0 \tag{2}$$

zusammengestellt, so wird die letztere, wenn immer nur die Punkte z aufgefasst werden, welche (1) und (2) gemeinsame s-Werthe ertheilen, auf die Form

$$qs - p = 0 \tag{3}$$

gebracht werden können, in welcher p und q ganze Functionen von z sind, weil alle höheren Potenzen von s als die erste vermöge der Gleichung (1) fortgeschafft werden können; es werden die gemeinsamen z-Werthe der Eliminationsgleichung von (1) und (3), d. h. der Gleichung

$$p^2 - q^2 R(z) = 0 \tag{4}$$

genügen, und die entsprechenden s-Werthe sodann durch den Ausdruck

$$s = \frac{p}{q} \tag{5}$$

eindeutig bestimmt sein.

Wird der Grad von p mit m bezeichnet, so werden sich $2m$ Lösungen der Gleichung (4) ergeben

$$z_1,\ z_2,\ \dots\ z_{2m},$$

wenn wir annehmen, dass der Grad von p^2 nicht kleiner als der von $q^2R(z)$, d. h. q höchstens vom $m-p-1^{\text{ten}}$ Grade ist. Sei ferner eine zweite Gleichung zwischen s und z

$$f_1(s,z)=0, \tag{6}$$

welche wieder, wenn nur der Gleichung (6) und (1) zugleich angehörige z- und s-Werthe in Betracht kommen, in die Form

$$q_1s-p_1=0, \tag{7}$$

gebracht werden kann, und mit (1) verbunden die der Gleichung

$$p_1^2-q_1^2R(z)=0 \tag{8}$$

angehörigen z Werthe

$$z_1',\ z_2',\ \dots\ z_{2m}'$$

liefert, wenn wiederum der Grad von p_1 der m^{te} und der von q_1 höchstens der $m-p-1^{te}$ sein soll, während die zugehörigen s Werthe durch den Ausdruck

$$s=\frac{p_1}{q_1}$$

bestimmt sind. Bildet man endlich die Gleichung

$$qs-p+\lambda(q_1s-p_1)=0,$$

und fasst die mit der Gleichung (1) gemeinsamen Lösungen dieser Gleichung auf, so sind diese die Wurzeln der Gleichung

$$(p+\lambda p_1)^2-(q+\lambda q_1)^2R(z)=0, \tag{11}$$

und man sieht unmittelbar, dass für $\lambda=0$ die von dem Parameter λ abhängigen z-Werthe in $z_1,\ z_2,\ \dots\ z_{2m}$, für $\lambda=\infty$ in $z_1',\ z_2'\ \dots\ z_{2m}'$ übergehen, während für eine continuirliche Reihe von λ-Werthen, die von $\lambda=0$ bis $\lambda=\infty$ führen, die z-Werthe stetig von dem einen System in das andere übergehen werden, und die zugehörigen s-Werthe nach (9) durch den Ausdruck

$$s=\frac{p+\lambda p_1}{q+\lambda q_1} \tag{12}$$

bestimmt sind, also auch an den Gränzen mit den durch (5) und (9) gegebenen übereinstimmen. Setzt man nun der Kürze halber

$$(13)\qquad (p+\lambda p_1)^2 - (q+\lambda q_1)^2 R(z) = \psi(z) = A(z-\zeta_1)(z-\zeta_2)\cdots(z-\zeta_{2m}),$$

worin $\zeta_1,\ \zeta_2,\ \ldots\ \zeta_{2m}$ von dem Parameter λ abhängige Grössen bedeuten, so wird sich durch Differentiation der Gleichung (13) nach λ

$$(14)\qquad 2(p+\lambda p_1)p_1 - 2(q+\lambda q_1)q_1 R(z) = \psi(z)\left\{\frac{\frac{d\zeta_1}{d\lambda}}{\zeta_1 - z} + \frac{\frac{d\zeta_2}{d\lambda}}{\zeta_2 - z} + \cdots + \frac{\frac{d\zeta_{2m}}{d\lambda}}{\zeta_{2m} - z} + \frac{\frac{dA}{d\lambda}}{A}\right\}$$

oder

$$(15)\qquad \frac{2(p+\lambda p_1)}{q+\lambda q_1}\left\{(q+\lambda q_1)p_1 - \frac{(q+\lambda q_1)^2 q_1}{p+\lambda p_1}R(z)\right\} = \psi(z)\left\{\frac{\frac{d\zeta_1}{d\lambda}}{\zeta_1 - z} + \cdots + \frac{\frac{d\zeta_{2m}}{d\lambda}}{\zeta_{2m} - z} + \frac{\frac{dA}{d\lambda}}{A}\right\}$$

ergeben. Da aber nach (13)

$$(q+\lambda q_1)^2 R(z) = (p+\lambda p_1)^2 - \psi(z)$$

ist, so geht (15) in

$$\frac{2(p+\lambda p_1)}{q+\lambda q_1}\Big\{(q+\lambda q_1)p_1 - (p+\lambda p_1)q_1\Big\} + \frac{2q_1\psi(z)}{q+\lambda q_1} = \psi(z)\left\{\frac{\frac{d\zeta_1}{d\lambda}}{\zeta_1 - z} + \cdots + \frac{\frac{d\zeta_{2m}}{d\lambda}}{\zeta_{2m} - z} + \frac{\frac{dA}{d\lambda}}{A}\right\}$$

oder in

$$\frac{2(p+\lambda p_1)}{q+\lambda q_1}(qp_1 - pq_1) + \frac{2q_1\psi(z)}{q+\lambda q_1} = \psi(z)\left\{\frac{\frac{d\zeta_1}{d\lambda}}{\zeta_1 - z} + \cdots + \frac{\frac{d\zeta_{2m}}{d\lambda}}{\zeta_{2m} - z} + \frac{\frac{dA}{d\lambda}}{A}\right\}$$

über, so dass, wenn $z = \zeta_\alpha$ gesetzt, die zugehörigen Werthe von p, p_1, q, q_1 für $z = \zeta_\alpha$ mit

$$p(\zeta_\alpha),\ p_1(\zeta_\alpha),\ q(\zeta_\alpha),\ q_1(\zeta_\alpha)$$

bezeichnet werden, ausserdem berücksichtigt wird, dass nach (11)

$$\sqrt{R(\zeta_\alpha)} = \frac{p(\zeta_\alpha) + \lambda p_1(\zeta_\alpha)}{q(\zeta_\alpha) + \lambda q_1(\zeta_\alpha)}$$

ist, und endlich mit $F(\zeta_\alpha)$, welches vom $p-1^{\text{ten}}$ Grade sein soll, multiplicirt wird, sich

$$(17)\qquad \frac{F(\zeta_\alpha)\dfrac{d\zeta_\alpha}{d\lambda}}{\sqrt{R(\zeta_\alpha)}} = 2F(\zeta_\alpha)\frac{p(\zeta_\alpha)q_1(\zeta_\alpha) - q(\zeta_\alpha)p_1(\zeta_\alpha)}{\psi'(\zeta_\alpha)}$$

ergiebt. Nimmt man nun über beide Seiten der Gleichung die Summe nach α für $\alpha = 1,\ 2,\ \ldots\ 2m$, so folgt

$$\sum_{\alpha=1}^{2m} \frac{F(\zeta_\alpha)\dfrac{d\zeta_\alpha}{d\lambda}}{\sqrt{R(\zeta_\alpha)}} = 2\sum_{\alpha=1}^{2m} \frac{F(\zeta_\alpha)\{p(\zeta_\alpha)q_1(\zeta_\alpha) - q(\zeta_\alpha)p_1(\zeta_\alpha)\}}{\psi'(\zeta_\alpha)} \tag{18}$$

und wenn man berücksichtigt, dass $\psi(z)$ vom $2m^{\text{ten}}$ Grade, $p(z)$ vom m^{ten}, $q(z)$ höchstens vom $m-p-1^{\text{ten}}$, $F(z)$ vom $p-1^{\text{ten}}$ Grade ist, so wird

$$F(z)\{p(z)q_1(z) - q(z)p_1(z)\}$$

höchstens vom $2m-2^{\text{ten}}$ Grade, und daher nach einem bekannten Satze

$$\sum_{\alpha=1}^{2m} \frac{F(\zeta_\alpha)\{p(\zeta_\alpha)q_1(\zeta_\alpha) - q(\zeta_\alpha)p_1(\zeta_\alpha)\}}{\psi'(\zeta_\alpha)} = 0,$$

sein. Es wird somit

$$\sum_{\alpha=1}^{2m} \frac{F(\zeta_\alpha)\dfrac{d\zeta_\alpha}{d\lambda}}{\sqrt{R(\zeta_\alpha)}} = 0,$$

und daher, wenn mit $d\lambda$ multiplicirt und zwischen den Gränzen ∞ und 0 für λ integrirt wird,

$$\sum_{\alpha=1}^{2m} \int_\infty^0 \frac{F(\zeta_\alpha)\dfrac{d\zeta_\alpha}{d\lambda}}{\sqrt{R(\zeta_\alpha)}}\, d\lambda = 0,$$

oder nach den oben gemachten Auseinandersetzungen

$$\sum_{\alpha=1}^{2m} \int_{z'_\alpha}^{z_\alpha} \frac{F(z)\,dz}{\sqrt{R(z)}} = 0, \tag{19}$$

worin der Integrationsweg durch den für λ von 0 bis ∞ beliebig gewählten Weg und die von λ abhängigen Functionalausdrücke von $\zeta_1,\ \zeta_2,\ \ldots\ \zeta_{2m}$ bestimmt ist, während die zu jedem ζ gehörigen Werthe von $\sqrt{R(\zeta)}$ durch die Gleichung (16) einander zugeordnet sind; wir finden also, *dass die Summe von* $2m$ *gleichartigen Integralen erster Gattung, deren obere Gränzen der Gleichung*

$$p^2 - q^2 R(z) = 0,$$

deren untere Gränzen

$$p_1^2 - q_1^2 R(z) = 0$$

genügen, worin p *und* p_1 *beliebige Functionen vom* m^{ten}, q *und* q_1 *beliebige Functionen höchstens vom* $m-p-1^{ten}$ *Grade sind, und deren Integrationswege in der oben bestimmten Weise ermittelt werden, den Werth Null hat.*

Gehen wir wieder zur Gleichung (17) zurück, welche durch Weglassung des Factors $F(\zeta_\alpha)$ in

$$\frac{\dfrac{d\zeta_\alpha}{d\lambda}}{\sqrt{R(\zeta_\alpha)}} = \frac{2\big(p(\zeta_\alpha)q_1(\zeta_\alpha) - q(\zeta_\alpha)p_1(\zeta_\alpha)\big)}{\psi'(\zeta_\alpha)},$$

übergeht, um aus derselben das Additionstheorem für die Integrale dritter Gattung abzuleiten, welche in den Punkten c_1 und c_2 und zwar auf je einem Blatte logarithmisch unendlich werden, und multipliciren dieselbe mit

$$\frac{\varepsilon_1 R(c_1)^{\frac{1}{2}}}{(c_1 - c_2)(\zeta_\alpha - c_1)},$$

so ergiebt sich

$$\frac{\varepsilon_1 R(c_1)^{\frac{1}{2}}}{(c_1 - c_2)(\zeta_\alpha - c_1)} \frac{\dfrac{d\zeta_\alpha}{d\lambda}}{\sqrt{R(\zeta_\alpha)}} = \frac{2\varepsilon_1 R(c_1)^{\frac{1}{2}}\big(p(\zeta_\alpha)q_1(\zeta_\alpha) - q(\zeta_\alpha)p_1(\zeta_\alpha)\big)}{\psi'(\zeta_\alpha)(c_1 - c_2)(\zeta_\alpha - c_1)}$$

und ebenso

$$\frac{\varepsilon_2 R(c_2)^{\frac{1}{2}}}{(c_2 - c_1)(\zeta_\alpha - c_2)} \frac{\dfrac{d\zeta_\alpha}{d\lambda}}{\sqrt{R(\zeta_\alpha)}} = \frac{2\varepsilon_2 R(c_2)^{\frac{1}{2}}\big(p(\zeta_\alpha)q_1(\zeta_\alpha) - q(\zeta_\alpha)p_1(\zeta_\alpha)\big)}{\psi'(\zeta_\alpha)(c_2 - c_1)(\zeta_\alpha - c_2)},$$

so dass, wenn man die Summe der beiden letzten Gleichungen um

$$\frac{\dfrac{d\zeta_\alpha}{d\lambda}}{(\zeta_\alpha - c_1)(\zeta_\alpha - c_2)}$$

vermehrt, das Resultat mit einer willkürlichen Constanten M multiplicirt und zu beiden Seiten

$$N \frac{F(\zeta_\alpha)\dfrac{d\zeta_\alpha}{d\lambda}}{\sqrt{R(\zeta_\alpha)}}$$

hinzuaddirt, worin N wieder eine willkürliche Constante und $F(\zeta_\alpha)$ eine Function $p - 1^{\text{ten}}$ Grades bedeutet, aus der über α von 1 bis $2m$ genommenen Summation die Gleichung hervorgeht

$$(20)\qquad \sum_{\alpha=1}^{2m}\left[M\left\{\frac{\frac{d\zeta_\alpha}{d\lambda}}{(\zeta_\alpha-c_1)(\zeta_\alpha-c_2)}\right.\right.$$

$$\left.\left.+\frac{\frac{\varepsilon_1 R(c_1)^{\frac{1}{2}}}{c_1-c_2}(\zeta_\alpha-c_2)+\frac{\varepsilon_2 R(c_2)^{\frac{1}{2}}}{c_2-c_1}(\zeta_\alpha-c_1)}{(\zeta_\alpha-c_1)(\zeta_\alpha-c_2)\sqrt{R(\zeta_\alpha)}}\frac{d\zeta_\alpha}{d\lambda}\right\}+N\frac{F(\zeta_\alpha)\frac{d\zeta_\alpha}{d\lambda}}{\sqrt{R(\zeta_\alpha)}}\right]$$

$$=\frac{2M\varepsilon_1 R(c_1)^{\frac{1}{2}}}{c_1-c_2}\sum_{\alpha=1}^{2m}\frac{p(\zeta_\alpha)q_1(\zeta_\alpha)-p_1(\zeta_\alpha)q(\zeta_\alpha)}{\psi'(\zeta_\alpha)(\zeta_\alpha-c_1)}$$

$$+\frac{2M\varepsilon_2 R(c_2)^{\frac{1}{2}}}{c_2-c_1}\sum_{\alpha=1}^{2m}\frac{p(\zeta_\alpha)q_1(\zeta_\alpha)-p_1(\zeta_\alpha)q(\zeta_\alpha)}{\psi'(\zeta_\alpha)(\zeta_\alpha-c_2)}$$

$$+M\sum_{\alpha=1}^{2m}\frac{\frac{d\zeta_\alpha}{d\lambda}}{(\zeta_\alpha-c_1)(\zeta_\alpha-c_2)}+N\sum_{\alpha=1}^{2m}\frac{F(\zeta_\alpha)\frac{d\zeta_\alpha}{d\lambda}}{\sqrt{R(\zeta_\alpha)}}.$$

Die rechte Seite dieser Gleichung lässt sich aber noch weiter vereinfachen. Denn, wenn man die Function

$$\frac{p(z)q_1(z)-p_1(z)q(z)}{\psi(z)}$$

in Partialbrüche zerlegt, so ergiebt sich

$$\frac{p(z)q_1(z)-p_1(z)q(z)}{\psi(z)}=\sum_{\alpha=1}^{2m}\frac{p(\zeta_\alpha)q_1(\zeta_\alpha)-p_1(\zeta_\alpha)q(\zeta_\alpha)}{\psi'(\zeta_\alpha)}\frac{1}{z-\zeta_\alpha},$$

und daher

$$(21)\qquad -\frac{p(c_1)q_1(c_1)-p_1(c_1)q(c_1)}{\psi(c_1)}=\sum_{\alpha=1}^{2m}\frac{p(\zeta_\alpha)q_1(\zeta_\alpha)-p_1(\zeta_\alpha)q(\zeta_\alpha)}{\psi'(\zeta_\alpha)}\frac{1}{\zeta_\alpha-c_1},$$

und ein ähnlicher Ausdruck, wenn c_2 statt c_1, gesetzt wird.

Ferner ist nach der oben erhaltenen Beziehung

$$\sum_{\alpha=1}^{2m}\frac{F(\zeta_\alpha)\frac{d\zeta_\alpha}{d\lambda}}{\sqrt{R(\zeta_\alpha)}}=0,$$

und es geht somit Gleichung (20) mit Berücksichtigung aller dieser Beziehungen, wenn ausserdem nach λ zwischen ∞ und 0 integrirt, und das in c_1 und c_2 auf je einem Blatte logarithmisch unendlich werdende allgemeine Integral dritter Gattung zwischen den

Gränzen z'_α und z_α genommen mit

$$\int_{z'_\alpha}^{z_\alpha} d\varPi(z, c_1, c_2)$$

bezeichnet wird, in die folgende über:

$$\begin{aligned}(22)\qquad \sum_{\alpha=1}^{2m}\int_{z'_\alpha}^{z_\alpha} d\varPi(z, c_1, c_2) = &-\frac{2M\varepsilon_1 R(c_1)^{\frac{1}{2}}}{c_1 - c_2}\int_\infty^0 \frac{p(c_1)q_1(c_1) - p_1(c_1)q(c_1)}{\psi(c_1)}\,d\lambda\\ &-\frac{2M\varepsilon_2 R(c_2)^{\frac{1}{2}}}{c_2 - c_1}\int_\infty^0 \frac{p(c_2)q_1(c_2) - p_1(c_2)q(c_2)}{\psi(c_2)}\,d\lambda\\ &+ M\sum_{\alpha=1}^{2m}\int_\infty^0 \frac{\frac{d\zeta_\alpha}{d\lambda}\,d\lambda}{(\zeta_\alpha - c_1)(\zeta_\alpha - c_2)}.\end{aligned}$$

Nun ist aber

$$\begin{aligned}\int \frac{\frac{d\zeta_\alpha}{d\lambda}\,d\lambda}{(\zeta_\alpha - c_1)(\zeta_\alpha - c_2)} &= \frac{1}{c_1 - c_2}\int \frac{\frac{d\zeta_\alpha}{d\lambda}\,d\lambda}{\zeta_\alpha - c_1} - \frac{1}{c_1 - c_2}\int \frac{\frac{d\zeta_\alpha}{d\lambda}\,d\lambda}{\zeta_\alpha - c_2}\\ &= \frac{1}{c_1 - c_2}\log\frac{\zeta_\alpha - c_1}{\zeta_\alpha - c_2}\end{aligned}$$

also

$$\int \frac{\frac{d\zeta}{d\lambda}\,d\lambda}{(\zeta_\alpha - c_1)(\zeta_\alpha - c_2)} = \frac{1}{c_1 - c_2}\left[\log\frac{\zeta_\alpha - c_1}{\zeta_\alpha - c_2}\right]_{z'_\alpha}^{z_\alpha} = \frac{1}{c_1 - c_2}\log\frac{(z_\alpha - c_1)(z'_\alpha - c_2)}{(z_\alpha - c_2)(z'_\alpha - c_1)},$$

und

$$\begin{aligned}(23)\qquad & M\sum_{\alpha=1}^{2m}\int_\infty^0 \frac{\frac{d\zeta_\alpha}{d\lambda}\,d\lambda}{(\zeta_\alpha - c_1)(\zeta_\alpha - c_2)}\\ &= \frac{M}{c_1 - c_2}\log\left\{\frac{(z_1 - c_1)(z_2 - c_1)\cdots(z_{2m} - c_1)(z'_1 - c_2)(z'_2 - c_2)\cdots(z'_{2m} - c_2)}{(z_1 - c_2)(z_2 - c_2)\cdots(z_{2m} - c_2)(z'_1 - c_1)(z'_2 - c_1)\cdots(z'_{2m} - c_1)}\right\}.\end{aligned}$$

Ferner ist, wie unmittelbar zu sehen,

$$\begin{aligned}&-\frac{2\big[p(c)q_1(c) - p_1(c)q(c)\big]}{\big(p(c) + \lambda p_1(c)\big)^2 - \big(q(c) + \lambda q_1(c)\big)^2 R(c)}\cdot\frac{\varepsilon R(c)^{\frac{1}{2}}}{c_1 - c_2}\\ &= \frac{1}{c_1 - c_2}\frac{d}{d\lambda}\log\frac{p(c) + \lambda p_1(c) - \big(q(c) + \lambda q_1(c)\big)\varepsilon\sqrt{R(c)}}{p(c) + \lambda p_1(c) + \big(q(c) + \lambda q_1(c)\big)\varepsilon\sqrt{R(c)}},\end{aligned}$$

oder da

$$\psi(c) = \big(p(c) + \lambda p_1(c)\big)^2 - \big(q(c) + \lambda q_1(c)\big)^2 R(c)$$

ist,

$$
\begin{aligned}
(24)\qquad & -\frac{2M\varepsilon_1 R(c_1)^{\frac{1}{2}}}{c_1-c_2}\int_\infty^0 \frac{p(c_1)q_1(c_1)-p_1(c_1)q(c_1)}{\psi(c_1)}d\lambda \\
&= \frac{M}{c_1-c_2}\left[\log\frac{p(c_1)+\lambda p_1(c_1)-\big(q(c_1)+\lambda q_1(c_1)\big)\varepsilon\sqrt{R(c_1)}}{p(c_1)+\lambda p_1(c_1)+\big(q(c_1)+\lambda q_1(c_1)\big)\varepsilon\sqrt{R(c_1)}}\right]_\infty^0 \\
&= \frac{M}{c_1-c_2}\log\left\{\frac{p(c_1)-q(c_1)\varepsilon_1\sqrt{R(c_1)}}{p(c_1)+q(c_1)\varepsilon_1\sqrt{R(c_1)}}\;\frac{p_1(c_1)+q_1(c_1)\varepsilon_1\sqrt{R(c_1)}}{p_1(c_1)-q_1(c_1)\varepsilon_1\sqrt{R(c_1)}}\right\},
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
(25)\qquad & -\frac{2M\varepsilon_2 R(c_2)^{\frac{1}{2}}}{c_2-c_1}\int_\infty^0 \frac{p(c_2)q_1(c_2)-p_1(c_2)q(c_2)}{\psi(c_2)}d\lambda \\
&= \frac{M}{c_2-c_1}\log\left\{\frac{p(c_2)-q(c_2)\varepsilon_2\sqrt{R(c_2)}}{p(c_2)+q(c_2)\varepsilon_2\sqrt{R(c_2)}}\cdot\frac{p_1(c_2)+q_1(c_2)\varepsilon_2\sqrt{R(c_2)}}{p_1(c_2)-q_1(c_2)\varepsilon_2\sqrt{R(c_2)}}\right\},
\end{aligned}
$$

so dass vermöge der Gleichungen (23), (24), (25) die Gleichung (22) in

$$
\begin{aligned}
(26)\qquad & \sum_{\alpha=1}^{2m}\int_{z'_\alpha}^{z_\alpha} d\varPi(z,c_1,c_2) \\
&= \frac{M}{c_1-c_2}\log\left\{\frac{p(c_1)-q(c_1)\varepsilon_1\sqrt{R(c_1)}}{p(c_1)+q(c_1)\varepsilon_1\sqrt{R(c_1)}}\;\frac{p(c_2)+q(c_2)\varepsilon_2\sqrt{R(c_2)}}{p(c_2)-q(c_2)\varepsilon_2\sqrt{R(c_2)}}\right. \times \\
&\qquad \frac{p_1(c_1)+q_1(c_1)\varepsilon_1\sqrt{R(c_1)}}{p_1(c_1)-q_1(c_1)\varepsilon_1\sqrt{R(c_1)}}\;\frac{p_1(c_2)-q_1(c_2)\varepsilon_2\sqrt{R(c_2)}}{p_1(c_2)+q_1(c_2)\varepsilon_2\sqrt{R(c_2)}} \times \\
&\qquad \left.\frac{(z_1-c_1)(z_2-c_1)\cdots(z_{2m}-c_1)(z'_1-c_2)(z'_2-c_2)\cdots(z'_{2m}-c_2)}{(z_1-c_2)(z_2-c_2)\cdots(z_{2m}-c_2)(z'_1-c_1)(z'_2-c_1)\cdots(z'_{2m}-c_1)}\right\}
\end{aligned}
$$

übergeht, worin ε_1 und ε_2 die positive oder negative Einheit bedeuten, oder, weil nach (4) und (8)

$$
\begin{aligned}
\frac{p(c_1)^2-q(c_1)^2R(c_1)}{p(c_2)^2-q(c_2)^2R(c_2)} &= \frac{(z_1-c_1)(z_2-c_1)\cdots(z_{2m}-c_1)}{(z_1-c_2)(z_2-c_2)\cdots(z_{2m}-c_2)} \\
\frac{p_1(c_2)^2-q_1(c_2)^2R(c_2)}{p_1(c_1)^2-q_1(c_1)^2R(c_1)} &= \frac{(z'_1-c_2)(z'_2-c_2)\cdots(z'_{2m}-c_2)}{(z'_1-c_1)(z'_2-c_1)\cdots(z'_{2m}-c_1)}
\end{aligned}
$$

ist,

$$
\begin{aligned}
(27)\qquad & \sum_{\alpha=1}^{2m}\int_{z'_\alpha}^{z_\alpha} d\varPi(z,c_1,c_2) \\
&= \frac{2M}{c_1-c_2}\log\left\{\frac{p(c_1)-q(c_1)\varepsilon_1\sqrt{R(c_1)}}{p(c_2)-q(c_2)\varepsilon_2\sqrt{R(c_2)}}\cdot\frac{p_1(c_2)-q_1(c_2)\varepsilon_2\sqrt{R(c_2)}}{p_1(c_1)-q_1(c_1)\varepsilon_1\sqrt{R(c_1)}}\right\},
\end{aligned}
$$

und *es ist somit die Summe von* $2m$ *gleichartigen Integralen dritter Gattung, deren untere und obere Gränzen Lösungen der Gleichungen*

$$p^2 - q^2 R(z) = 0, \quad {p_1}^2 - {q_1}^2 R(z) = 0$$

sind, durch einen Logarithmus ausgedrückt, dessen Argument aus den Functionen $p(z)$, $p_1(z)$, $q(z)$, $q_1(z)$, $\sqrt{R(z)}$ *für die Punkte* c_1 *und* c_2 *rational zusammengesetzt ist.*

Um nun die entsprechende Gleichung für die Integrale zweiter Gattung herzuleiten, bemerke man, dass man aus der Gleichung (27) für die Hauptintegrale dritter Gattung, die sich nach dem obigen dadurch ergeben, dass man

$$M = \frac{c_1 - c_2}{2}$$

setzt, die Beziehung erhält

$$\sum_{\alpha=1}^{2m} \int_{z'_\alpha}^{z_\alpha} dH(z, c_1, c_2) = \log \left\{ \frac{p(c_1) - q(c_1)\varepsilon_1\sqrt{R(c_1)}}{p(c_2) - q(c_2)\varepsilon_2\sqrt{R(c_2)}} \cdot \frac{p_1(c_2) - q_1(c_2)\varepsilon_2\sqrt{R(c_2)}}{p_1(c_1) - q_1(c_1)\varepsilon_1\sqrt{R(c_1)}} \right\}, \tag{28}$$

und dass jedes im Punkte c_1 algebraisch von der ersten Ordnung auf einem Blatte, wie $\frac{M'}{z-c_1}$ unendlich werdende hyperelliptische Integral zweiter Gattung sich in der Form darstellen lässt

$$-M' \frac{d}{dc_1} H(z, c_1, c_2) + NJ(z),$$

wenn $J(z)$ ein Integral erster Gattung bedeutet. Daraus folgt aber, da

$$\sum_{\alpha=1}^{2m} \int_{z'_\alpha}^{z_\alpha} dJ(z) = 0$$

ist, für die zwischen den Gränzen z'_α und z_α genommenen allgemeinen Integrale zweiter Gattung

$$\sum_{\alpha=1}^{2m} \int_{z'_\alpha}^{z_\alpha} dE(z, c_1) = -M' \frac{d}{dc_1} \log \left\{ \frac{p(c_1) - q(c_1)\varepsilon_1\sqrt{R(c_1)}}{p_1(c_1) - q_1(c_1)\varepsilon_1\sqrt{R(c_1)}} \right\}, \tag{29}$$

und *daher die Summe dieser gleichartigen* $2m$ *hyperelliptischen Integrale zweiter Gattung, deren untere und obere Gränzen Lösungen der Gleichungen*

$$p^2 - q^2 R(z) = 0, \quad {p_1}^2 - {q_1}^2 R(z) = 0$$

sind, rational zusammengesetzt aus den Functionen $p(z)$, $q(z)$, $p_1(z)$, $q_1(z)$, $\sqrt{R(z)}$ *und deren erster Ableitung für den Punkt* c_1.

Da ferner früher gezeigt worden, dass man durch Differentiation des Integrals zweiter Gattung nach dem Parameter c_1 ein hyperelliptisches Integral erhält, welches in c_1 von der zweiten Ordnung algebraisch unendlich wird, so wird für eine Reihe gleichartiger Integrale $E_1(z, c_1)$, welche in $z = c_1$ wie

$$\frac{M''}{(z-c_1)^2}$$

unendlich werden, nach (29) die Beziehung bestehen

$$(30)\qquad \sum_{\alpha=1}^{2m} \int_{z'_\alpha}^{z_\alpha} dE_1(z, c_1) = -\frac{M''}{1} \frac{d^2}{dc_1{}^2} \log \left\{ \frac{p(c_1) - q(c_1)\varepsilon_1 \sqrt{R(c_1)}}{p_1(c_1) - q_1(c_1)\varepsilon_1 \sqrt{R(c_1)}} \right\};$$

schliesst man so fort, so *wird sich für hyperelliptische Integrale, welche in $z = c_1$ algebraisch von der k^{ten} Ordnung unendlich werden wie*

$$\frac{M^{(k)}}{(z-c_1)^k},$$

die Gleichung ergeben

$$(31)\qquad \sum_{\alpha=1}^{2m} \int_{z'_\alpha}^{z_\alpha} dE_{k-1}(z, c_1) = -\frac{M^{(k)}}{1 \cdot 2 \cdots (k-1)} \frac{d^k}{dc_1{}^k} \log \left\{ \frac{p(c_1) - q(c_1)\varepsilon_1 \sqrt{R(c_1)}}{p_1(c_1) - q_1(c_1)\varepsilon_1 \sqrt{R(c_1)}} \right\}.$$

Stellt man diese Resultate zusammen, so folgt unmittelbar, *dass, wenn ein hyperelliptisches Integral $J(z, c_1, a)$ in $z = c_1$ unendlich wird wie*

$$A_1 \log(z-c_1) + B_1(z-c_1)^{-1} + C_1(z-c_1)^{-2} + \cdots + M_1(z-c_1)^{-m_1}$$

und in $z = a$ wie

$$-A_1 \log(z-a),$$

nach den vorher aufgestellten Gleichungen mit Berücksichtigung der verschwindenden Summe der Integrale erster Gattung, *das Abel'sche Theorem für $2m$ gleichartige Integrale folgendermassen lautet:*

$$(32)\qquad \sum_{\alpha=1}^{2m} \int_{z'_\alpha}^{z_\alpha} dJ(z, c_1, a) = A_1 \log \left\{ \frac{p(c_1) - q(c_1)\varepsilon_1 \sqrt{R(c_1)}}{p(a) - q(a)\varepsilon_1 \sqrt{R(a)}} \cdot \frac{p_1(a) - q_1(a)\varepsilon_1 \sqrt{R(a)}}{p_1(c_1) - q_1(c_1)\varepsilon_1 \sqrt{R(c_1)}} \right\}$$
$$- B_1 \frac{d}{dc_1} \log \left\{ \frac{p(c_1) - q(c_1)\varepsilon_1 \sqrt{R(c_1)}}{p_1(c_1) - q_1(c_1)\varepsilon_1 \sqrt{R(c_1)}} \right\} - \frac{C_1}{1} \frac{d^2}{dc_1{}^2} \log \left\{ \frac{p(c_1) - q(c_1)\varepsilon_1 \sqrt{R(c_1)}}{p_1(c_1) - q_1(c_1)\varepsilon_1 \sqrt{R(c_1)}} \right\}$$
$$- \frac{D_1}{1 \cdot 2} \frac{d^3}{dc_1{}^3} \log \left\{ \frac{p(c_1) - q(c_1)\varepsilon_1 \sqrt{R(c_1)}}{p_1(c_1) - q_1(c_1)\varepsilon_1 \sqrt{R(c_1)}} \right\} - \cdots$$

$$-\frac{M_1}{1\cdot 2\cdot (m_1-1)}\frac{d^{m_1}}{d{c_1}^{m_1}}\log\left\{\frac{p(c_1)-q(c_1)\varepsilon_1\sqrt{R(c_1)}}{p_1(c_1)-q_1(c_1)\varepsilon_1\sqrt{R(c_1)}}\right\}.$$

Bezeichnet man nunmehr mit $J(z, c_1, c_2, \dots c_\nu)$ ein hyperelliptisches Integral, welches in c_1 unendlich wird wie

$$A_1\log(z-c_1)+B_1(z-c_1)^{-1}+C_1(z-c_1)^{-2}+\dots+M_1(z-c_1)^{-m_1},$$

in c_2 wie

$$A_2\log(z-c_2)+B_2(z-c_2)^{-1}+C_2(z-c_2)^{-2}+\dots+M_2(z-c_2)^{-m_2},$$

u. s. w., endlich in c_ν wie

$$A_\nu\log(z-c_\nu)+B_\nu(z-c_\nu)^{-1}+C_\nu(z-c_\nu)^{-2}+\dots+M_\nu(z-c_\nu)^{-m_\nu},$$

so wird sich die Summe von $2m$ solchen gleichartigen hyperelliptischen Integralen, deren obere Gränzen die Lösungen $z_1, z_2, \dots z_{2m}$ der Gleichung

$$p^2-q^2R(z)=0,$$

und deren untere Gränzen $z_1', z_2', \dots z_{2m}'$ die Lösungen der Gleichung

$${p_1}^2-{q_1}^2R(z)=0,$$

sind, worin p und p_1 beliebige ganze Polynome m^{ten} Grades, q und q_1 beliebige ganze Polynome höchstens vom $m-p-1^{\text{ten}}$ Grade sind, nach den früheren Auseinandersetzungen in der folgenden Form darstellen

$$\begin{aligned}\sum_{\alpha=1}^{2m}\int_{z_\alpha'}^{z_\alpha} dJ(z, c_1, c_2, \dots c_\nu) = \sum_{\alpha=1}^{2m}\int_{z_\alpha'}^{z_\alpha} dJ(z, c_1, a) &+ \sum_{\alpha=1}^{2m}\int_{z_\alpha'}^{z_\alpha} dJ(z, c_2, a)+\cdots\\ &+\sum_{\alpha=1}^{2m}\int_{z_\alpha'}^{z_\alpha} dJ(z, c_\nu, a),\end{aligned}$$

wenn a ein willkürlich gewählter Punkt ist, und $J(z, c_\varrho, a)$ ein Integral bedeutet, welches in c_ϱ unendlich wird wie

$$A_\varrho\log(z-c_\varrho)+B_\varrho(z-c_\varrho)^{-1}+C_\varrho(z-c_\varrho)^{-2}+\dots+M_\varrho(z-c_\varrho)^{-m_\varrho}$$

und in $z=a$ wie

$$-A_\varrho\log(z-a).$$

Wendet man nun die in Gleichung (32) gefundene Beziehung auf die einzelnen Integrale an, so ergiebt sich die folgende Form des Abel'schen Theorems:

$$(33)\quad \sum_{\alpha=1}^{2m} \int_{z'_\alpha}^{z_\alpha} dJ(z, c_1, c_2, \dots c_\nu) = \sum_{\varrho=1}^{\nu} A_\varrho \log \left\{ \frac{p(c_\varrho) - q(c_\varrho)\varepsilon_\varrho \sqrt{R(c_\varrho)}}{p_1(c_\varrho) - q_1(c_\varrho)\varepsilon_\varrho \sqrt{R(c_\varrho)}} \right\}$$
$$- \sum_{\varrho=1}^{\nu} B_\varrho \frac{d}{dc_\varrho} \log \left\{ \frac{p(c_\varrho) - q(c_\varrho)\varepsilon_\varrho \sqrt{R(c_\varrho)}}{p_1(c_\varrho) - q_1(c_\varrho)\varepsilon_\varrho \sqrt{R(c_\varrho)}} \right\}$$
$$- \sum_{\varrho=1}^{\nu} \frac{C_\varrho}{1} \frac{d^2}{dc_\varrho^2} \log \left\{ \frac{p(c_\varrho) - q(c_\varrho)\varepsilon_\varrho \sqrt{R(c_\varrho)}}{p_1(c_\varrho) - q_1(c_\varrho)\varepsilon_\varrho \sqrt{R(c_\varrho)}} \right\}$$
$$- \dots - \sum_{\varrho=1}^{\nu} \frac{M_\varrho}{1 \cdot 2 \cdots (m_\varrho - 1)} \frac{d^{m_\varrho}}{dc_\varrho^{m_\varrho}} \log \left\{ \frac{p(c_\varrho) - q(c_\varrho)\varepsilon_\varrho \sqrt{R(c_\varrho)}}{p_1(c_\varrho) - q_1(c_\varrho)\varepsilon_\varrho \sqrt{R(c_\varrho)}} \right\},$$

wobei zu beachten, dass der Werth der zu den einzelnen z-Werthen gehörigen Irrationalität durch die Gleichung

$$\sqrt{R(\zeta_\alpha)} = \frac{p(\zeta_\alpha) + \lambda p_1(\zeta_\alpha)}{q(\zeta_\alpha) + \lambda q_1(\zeta_\alpha)}$$

fest bestimmt ist.

Für den Fall, dass die betrachteten Integrale in den Verzweigungspunkten unendlich werden, sieht man, dass mit Hülfe der in der dritten Vorlesung aufgestellten Normalformen solcher Integrale die Resultate nur geringe Modificationen erleiden.

Die vorher gewonnenen Resultate lassen sich nun aber noch in anderer Form aussprechen; wählt man nämlich $2m - p$ Werthe

$$z_1, z_2, \dots z_{2m-p}$$

als obere Gränzen und

$$z'_1, z'_2, \dots z'_{2m-p}$$

als untere Gränzen beliebig, und bestimmt die Constanten des Ausdruckes

$$p(z) - q(z)\sqrt{R(z)},$$

deren Anzahl, wenn $p(z)$ vom m^{ten} und $q(z)$ vom $m - p - 1^{\text{ten}}$ Grade ist, von der multiplicatorischen Constanten abgesehen $2m - p$ ist, so, dass

$$p(z) - q(z)\sqrt{R(z)} = 0$$

wird für $z = z_1, z_2, \dots z_{2m-p}$, und $\sqrt{R(z)}$ für jeden dieser Werthe ein beliebiges, aber fest bestimmtes Zeichen hat, ebenso $p_1(z)$ und $q_1(z)$ so, dass

$$p_1(z) - q_1(z)\sqrt{R(z)} = 0$$

ist für $z = z_1', z_2', \dots z_{2m-p}'$, wiederum mit beliebiger, aber fester Zuordnung des Wurzelwerthes, so werden die Gleichungen

$$p(z)^2 - q(z)^2 R(z) = 0$$

und

$$p_1(z)^2 - q_1(z)^2 R(z) = 0$$

ausser jenen $2m - p$ Grössen noch p Wurzeln

$$z_{2m-p+1}, \dots z_{2m}, \text{ resp. } z_{2m-p+1}', \dots z_{2m}'$$

haben, und wenn den Bestimmungsgleichungen gemäss

$$\text{(a)} \qquad \sqrt{R(z_{2m-p+\alpha})} = \frac{p(z_{2m-p+\alpha})}{q(z_{2m-p+\alpha})}, \quad \sqrt{R(z_{2m-p+\alpha}')} = \frac{p(z_{2m-p+\alpha}')}{q(z_{2m-p+\alpha}')}$$

gesetzt wird, so werden für diese $2m$ Werthepaare von z und z' mit den zugehörigen Wurzelwerthen $\sqrt{R(z)}$ die oben für die hyperelliptischen Integrale gefundenen Relationen statthaben, d. h. es werden sich jene $2m - p$ gegebenen Integrale zu p hyperelliptischen Integralen zusammenfassen lassen von algebraisch-logarithmischen Theilen abgesehen; bemerkt man nun, dass sich die Coefficienten als Unbekannte linearer Gleichungen rational aus den Werthen

$$z_1, z_2, \dots z_{2m-p}, \sqrt{R(z_1)}, \sqrt{R(z_2)}, \dots \sqrt{R(z_{2m-p})},$$
$$z_1', z_2', \dots z_{2m-p}', \sqrt{R(z_1')}, \sqrt{R(z_2')}, \dots \sqrt{R(z_{2m-p}')},$$

zusammensetzen werden, und dass, wenn in den Gleichungen

$$p(z)^2 - q(z)^2 R(z) = C(z - z_1)(z - z_2) \cdots (z - z_{2m-p})(z - z_{2m-p+1}) \cdots (z - z_{2m})$$
$$p_1(z)^2 - q_1(z)^2 R(z) = C_1(z - z_1')(z - z_2') \cdots (z - z_{2m-p}')(z - z_{2m-p+1}') \cdots (z - z_{2m}')$$

die linken Seiten derselben durch

$$(z - z_1)(z - z_2) \cdots (z - z_{2m-p}) \text{ resp. } (z - z_1')(z - z_2') \cdots (z - z_{2m-p}')$$

dividirt werden, sich

$$(z - z_{2m-p+1}) \cdots (z - z_{2m}) = z^p + P_1 z^{p-1} + \cdots + P_p = 0$$
$$(z - z_{2m-p+1}') \cdots (z - z_{2m}') = z^p + P_1' z^{p-1} + \cdots + P_p' = 0$$

ergiebt, worin vermöge eben dieser Eigenschaft der Coefficienten von $p(z)$ und $q(z)$, $p_1(z)$ und $q_1(z)$ auch die Grössen

$$\begin{gathered} P_1, P_2, \dots P_p \\ P'_1, P'_2, \dots P'_p \end{gathered}$$

rational aus

$$z_1, z_2, \dots z_{2m-p}, \sqrt{R(z_1)}, \sqrt{R(z_2)}, \dots \sqrt{R(z_{2m-p})},$$

resp.

$$z'_1, z'_2, \dots z'_{2m-p}, \sqrt{R(z'_1)}, \sqrt{R(z'_2)}, \dots \sqrt{R(z'_{2m-p})},$$

zusammengesetzt sind, so folgt, dass *sich $2m-p$ gleichartige hyperelliptische Integrale zu p eben solchen Integralen vereinigen lassen, deren Gränzen Lösungen von Gleichungen p^{ten} Grades sind, deren Coefficienten rational aus den eben bezeichneten Grössen zusammengesetzt sind, und deren Irrationalitäten durch die Gleichungen* (a) *bestimmt werden, welche dieselben mit Hülfe der willkürlich angenommenen Gränzen und Irrationalitäten rational durch die entsprechende Gränze ausdrücken.*

Ist p eine ungrade Zahl, so sieht man, dass jede ungrade Anzahl von Integralen auf die feste Zahl von p solchen zurückgeführt werden kann, und ist p grade, so gilt dasselbe für jede grade Anzahl von Integralen; ist jedoch p ungrade oder grade, und es soll gezeigt werden, dass auch jede grade oder ungrade Anzahl von Integralen auf die feste Zahl von p solchen reducirt werden kann, so braucht man nur ein neues Integral zu jener gegebenen graden oder ungraden Anzahl von Integralen hinzuzunehmen, dessen obere und untere Gränze derselbe im Endlichen gelegene Verzweigungspunkt von $\sqrt{R(z)}$ ist z. B. α_1; dann wird einerseits das betreffende Integral wegen der Gleichheit der oberen und unteren Gränze herausfallen, andererseits $z-\alpha_1$ ein Factor von $p(z)$ sein müssen, weil er in $R(z)$ aufgeht, und somit die obigen Gleichungen, wenn

$$\begin{aligned} p(z) &= (z-\alpha_1)P(z), & q(z) &= Q(z) \\ p_1(z) &= (z-\alpha_1)P_1(z), & q_1(z) &= Q_1(z) \end{aligned}$$

gesetzt wird, in

$$\begin{aligned} (z-\alpha_1)P(z)^2 - Q(z)^2\frac{R(z)}{z-\alpha_1} &= C(z-z_1)\cdots(z-z_{2m-p-1})(z-z_{2m-p+1})\cdots(z-z_{2m}) \\ (z-\alpha_1)P_1(z)^2 - Q_1(z)^2\frac{R(z)}{z-\alpha_1} &= C_1(z-z'_1)\cdots(z-z'_{2m-p-1})(z-z'_{2m-p+1})\cdots(z-z'_{2m}) \end{aligned}$$

übergehen, so dass die weiteren oben gemachten Schlüsse dieselben bleiben, und der Satz daher bestehen bleibt.

Die oben ausgeführte Bestimmung der Coefficienten von $p(z)$ und $q(z)$ bleibt jedoch nur so lange möglich, als die Grössen

$$z_1, \ z_2, \ \dots \ z_{2m-p}, \text{ resp. } z'_1, \ z'_2, \ \dots \ z'_{2m-p}$$

unter einander verschieden waren, da nur dann so viel verschiedene lineare Gleichungen sich ergeben, als unbestimmte Coefficienten in $p(z)$ und $q(z)$ eintreten. Sind jedoch μ_1 der z-Grössen gleich z_1, μ_2 gleich $z_2, \dots \mu_r$ gleich z_r, so dass

$$\mu_1 + \mu_2 + \cdots + \mu_r = 2m - p,$$

ebenso μ'_1 der z'-Grössen gleich z'_1, μ'_2 gleich $z'_2, \dots \mu'_s$ gleich z'_s (wobei wir voraussetzen wollen, dass keiner der vielfachen z-Werthe ein Nullwerth des Polynoms $R(z)$ ist), so dass auch

$$\mu'_1 + \mu'_2 + \cdots + \mu'_s = 2m - p$$

ist, so kann man entweder nach der in der ersten Vorlesung angegebenen Methode verfahren oder auch in folgender Weise: man bestimme eine ganze Function $f(z)$ vom $2m - p - 1^{\text{ten}}$ Grade so, dass für

$$z = z_1, \ z = z_2, \ \dots \ z = z_r$$

die Function sowohl als ihre

$$\mu_1 - 1, \ \mu_2 - 1, \ \dots \ \mu_r - 1$$

ersten Ableitungen dieselben Werthe haben als für eben diese Argumente die Function $\sqrt{R(z)}$ und die eben so hohen Ableitungen dieser Grösse. Diese Aufgabe ist vollständig bestimmt, da der Werth von $\sqrt{R(z)}$ also auch der aller Ableitungen für jene Specialwerthe als fest gegeben vorausgesetzt wird, und die Function $f(z) 2m - p$ Constanten besitzt, welche sich durch die vermöge der Identificirung jener Functionalwerthe und ihrer Ableitungen sich ergebenden

$$\mu_1 + \mu_2 + \cdots + \mu_r = 2m - p$$

Gleichungen, welche linear in jenen $2m - p$ Constanten sind, eindeutig bestimmen lassen. Ist nun jene Function $f(z)$ gefunden, wobei wieder zu bemerken, dass die Coefficienten derselben rational aus

$$z_1, \ z_2, \ \dots \ z_r, \ \sqrt{R(z_1)}, \ \sqrt{R(z_2)}, \ \dots \ \sqrt{R(z_r)}$$

zusammengesetzt sind, so wird die Function

$$\left[f(z) - \sqrt{R(z)}\right]\left[f(z) + \sqrt{R(z)}\right] = f(z)^2 - R(z)$$

durch

$$(z - z_1)^{\mu_1}(z - z_2)^{\mu_2} \cdots (z - z_r)^{\mu_r} = \psi(z)$$

theilbar sein, und sich somit

$$f(z)^2 - R(z) = \psi(z)\psi_1(z) \tag{34}$$

ergeben. Ist nun $p(z)$ eine Function m^{ten} und $q(z)$ eine Function $m - p - 1^{\text{ten}}$ Grades, die zusammen $2m - p + 1$ Constanten haben, so wird man die Function

$$p(z) - q(z)f(z)$$

so bestimmen können, dass dieselbe für $z = z_1$ nebst ihren $\mu_1 - 1$ ersten Ableitungen, für $z = z_2$ nebst ihren $\mu_2 - 1$ ersten Ableitungen, endlich für $z = z_r$ mit ihren $\mu_r - 1$ ersten Ableitungen verschwindet,

welche Bestimmung wieder $2m - p$ Gleichungen liefert, deren rechte Seiten Null sind, so dass wieder von der multiplicatorischen Constanten abgesehen die Functionen $p(z)$ und $q(z)$ vollständig bestimmt sind, und

$$p(z) - q(z)f(z) = \psi(z)\psi_2(z) \tag{35}$$

oder

$$\big[p(z) - q(z)f(z)\big]\big[p(z) + q(z)f(z)\big] = \psi(z)\psi_3(z)$$

oder

$$p(z)^2 - q(z)^2 f(z)^2 = \psi(z)\psi_3(z)$$

wird, welche Gleichung vermöge (34) in

$$p(z)^2 - q(z)^2 R(z)^2 = \psi(z)\chi(z) \tag{36}$$

übergeht, worin $\chi(z)$ eine ganze Function von z bedeutet; da aber $p(z)^2$ von $2m^{\text{ten}}$, $q(z)^2 R(z)$ vom $2m - 2p - 2 + 2p + 1 = 2m - 1^{\text{ten}}$ Grade ist, so folgt, dass $\chi(z)$ vom p^{ten} Grade sein wird, und es wird daher, wenn

$$\chi(z) = C(z - z_{2m-p+1}) \cdots (z - z_{2m})$$

gesetzt wird, die Gleichung (36) in

$$p(z)^2 - q(z)^2 R(z) = C(z - z_1)^{\mu_1} \cdots (z - z_r)^{\mu_r}(z - z_{2m-p+1}) \cdots (z - z_{2m}) \tag{37}$$

übergehen. Ausserdem war aber

$$f(z_\alpha) = \sqrt{R(z_\alpha)}$$

und

$$p(z_\alpha) - q(z_\alpha)f(z_\alpha) = 0,$$

d. h. es wird

$$\sqrt{R(z_\alpha)} = \frac{p(z_\alpha)}{q(z_\alpha)}; \tag{38}$$

ebenso wird man eine Function m^{ten} Grades $p_1(z)$ und eine Function $m-p-1^{\text{ten}}$ Grades $q_1(z)$ bestimmen können, welche den Gleichungen

$$\begin{gathered} p_1(z)^2 - q_1(z)^2 R(z) \\ = C_1(z-z_1')^{\mu_1'}(z-z_2')^{\mu_2'}\cdots(z-z_s')^{\mu_s'}(z-z'_{2m-p+1})\cdots(z-z'_{2m}) \end{gathered} \tag{39}$$

und

$$\sqrt{R(z_\alpha')} = \frac{p_1(z_\alpha')}{q_1(z_\alpha')} \tag{40}$$

genügen, und dies sind wieder die hinreichenden Bedingungen für das Bestehen der Integralrelationen, so dass sich ebenfalls die $2m-p$ Integrale mit zum Theil gleichen oberen und unteren Gränzen von einem algebraisch-logarithmischen Theile abgesehen zu p neuen gleichartigen Integralen zusammensetzen, deren Gränzen wiederum Lösungen einer Gleichung p^{ten} Grades sind, deren Coefficienten rational aus den gegebenen Gränzen und Irrationalitäten zusammengesetzt sind, während ihre Irrationalitäten von eben diesen Grössen und den zugehörigen Gränzen rational abhängen; es ist zu bemerken, dass der hinzukommende algebraische Theil, wie früher allgemein gezeigt worden, eine rationale Function der Gränzen und Irrationalitäten der gegebenen $2m-p$ Integrale ist, und der Logarithmus als Argument eine ebensolche Function enthält.

Siebente Vorlesung.

Das allgemeine Transformationsproblem der hyperelliptischen Integrale.

Nachdem wir erwiesen haben, dass einer additiven Verbindung gleichartiger hyperelliptischer Integrale eine algebraische Beziehung zwischen den oberen Gränzen dieser Integrale entsprechen kann, wollen wir unsere Betrachtung auf die allgemeinsten algebraischen Beziehungen ausdehnen, welche zwischen hyperelliptischen Integralen überhaupt bestehen können, sie mögen gleichartig oder ungleichartig sein d. h. zu derselben oder zu verschiedenen Irrationalitäten gehören, wenn auch zwischen den Gränzen dieser Integrale algebraische Beziehungen stattfinden sollen.

Sei

$$F(J_1, J_2, J_3, \dots J_n) = 0 \tag{a}$$

irgend ein algebraischer Zusammenhang zwischen einer Reihe im Allgemeinen verschiedenartiger hyperelliptischer Integrale, deren Gränzen $z_1, z_2, z_3, \dots$ auch wieder algebraisch mit einander verbunden sein mögen, und nehmen wir an, dass nicht schon zwischen weniger als n jener Integrale ein algebraischer Zusammenhang mit ebenfalls algebraisch unter einander verbundenen Gränzen bestehe, da wir sonst *diesen* Zusammenhang der weiteren Untersuchung zur Aufstellung der allgemeinsten Form eines solchen zu Grunde legen würden.

Greifen wir zwei jener in (a) vorkommenden Integrale J_α und J_β heraus und bezeichnen eben jene Relation kurz durch

$$J_\alpha = \varphi(z_1, J_\beta), \tag{b}$$

wobei in φ alle andern Integrale enthalten, nur nicht explicite angegeben sind, und z_1 eine der in der Relation als unabhängige Variable vorkommenden Gränzen bedeutet, dann folgt durch Differentiation nach z_1

$$\frac{dJ_\alpha}{dz_1} = \frac{\partial\varphi(z_1, J_\beta)}{\partial z_1} + \frac{\partial\varphi(z_1, J_\beta)}{\partial J_\beta}\frac{dJ_\beta}{dz_1}, \tag{c}$$

worin sich die erste Differentiation der φ-Function auf alle von z_1 abhängigen Grössen ausser J_β bezieht; bemerkt man nun, dass

$$\frac{dJ_\alpha}{dz_1} \text{ und } \frac{dJ_\beta}{dz_1}$$

nach der Natur der hyperelliptischen Integrale und in Folge der Annahme, dass die Gränzen in algebraischem Zusammenhange stehen sollen, algebraische Functionen der unabhängigen Veränderlichen sind, während auf der rechten Seite der Gleichung (c) im Allgemeinen sämmtliche Integrale mit Ausnahme von J_α vorkommen, so muss man, weil angenommen wurde, dass ein algebraischer Zusammenhang zwischen weniger als n jener Integrale nicht bestehe, schliessen, dass die Beziehung (c) für jeden beliebigen Werth von J_β existirt, weil sie eine in allen diesen Integralen identische Gleichung darstellen muss. Setzt man sodann, was hiernach gestattet ist, in diese Gleichung

$$J_\beta + \mu \text{ statt } J_\beta,$$

worin μ eine Constante bedeutet, so folgt

$$\text{(d)} \qquad \frac{dJ_\alpha}{dz_1} = \frac{\partial\varphi(z_1, J_\beta + \mu)}{\partial z_1} + \frac{\partial\varphi(z_1, J_\beta + \mu)}{\partial(J_\beta + \mu)}\frac{d(J_\beta + \mu)}{dz_1},$$

und daher durch Vergleichung von (c) mit (d), da (b) das Integral von (c) war, als Integral der Gleichung (d)

$$\text{(e)} \qquad J_\alpha + m = \varphi(z_1, J_\beta + \mu)$$

worin m eine Constante und zugleich bestimmte Function von μ ist; es wird somit, wenn zur Abkürzung

$$\varphi(z_1, J_\beta) = \psi(J_\beta)$$

gesetzt wird,

$$\text{(f)} \qquad \psi(J_\beta + \mu) = \psi(J_\beta) + m$$

sein müssen für jeden Werth von J_β und für jeden Werth von μ mit dem zugehörigen Werthe von m.

Um zuerst die Art der Abhängigkeit von m und μ festzustellen, setzen wir $J_\beta = 0$ und erhalten

$$m = \psi(\mu) - \psi(0),$$

so dass (f) in

$$\psi(J_\beta + \mu) = \psi(J_\beta) + \psi(\mu) - \psi(0)$$

übergeht; differentiirt man diese Gleichung nach J_β und μ, so folgt

$$\psi'(J_\beta + \mu) = \psi'(J_\beta)$$
$$\psi'(J_\beta + \mu) = \psi'(\mu),$$

und daher

$$\psi'(J_\beta) = \psi'(\mu) \text{ d. h. } \psi'(J_\beta) = c,$$

worin c von z_1 und den andern Integralen, aber nicht von J_β abhängen kann, man findet somit

$$\psi(J_\beta) = cJ_\beta + c_1,$$

d. h. $\psi(J_\beta)$ ist in Bezug auf J_β linear. Setzen wir diesen Werth in die Gleichung (f) ein, so folgt

$$c(J_\beta + \mu) + c_1 = cJ_\beta + c_1 + m$$

oder

$$c\mu = m,$$

d. h. es ist c eine Constante, und

> *es wird daher die allgemeinste Form jener algebraischen Beziehung eine lineare Function der Integrale*
>
> $$J_1, J_2, \dots J_n$$
>
> *sein, deren Coefficienten constante, von der Variabeln z_1 unabhängige Grössen sind, vermehrt um eine Grösse u, welche von den Integralen frei ist, aber von der Variabeln z_1 (und also auch von den von dieser algebraisch abhängigen Gränzen der verschiedenen Integrale) algebraisch abhängen wird, und welche also die Gestalt hat*
>
> $$a_1 J_1 + a_2 J_2 + \dots + a_n J_n + u = 0.$$

Wir gehen nunmehr auf eine weitere Untersuchung dieser allgemeinen linearen Beziehung zwischen hyperelliptischen Integralen ein und sondern in dieser noch diejenigen Integrale aus, welche auf die logarithmische Transcendente führen, so dass das niedrigste, in der Relation vorkommende Integral das elliptische sein wird.

Setzen wir

$$(1) \qquad \begin{aligned} R_{2p+1}^{(\varrho)}(z) &= (z - \alpha_1^{(\varrho)})(z - \alpha_2^{(\varrho)}) \cdots (z - \alpha_{2p+1}^{(\varrho)}), \\ R_{2p-1}^{(\varrho)}(z) &= (z - \beta_1^{(\varrho)})(z - \beta_2^{(\varrho)}) \cdots (z - \beta_{2p-1}^{(\varrho)}), \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots \end{aligned}$$

und verstehen unter

$$F\bigl(z, \sqrt{R(z)}\,\bigr)$$

eine rationale Function von z und $\sqrt{R(z)}$, so sei die zwischen den hyperelliptischen Integralen bestehende Relation

$$
(2)\quad
\begin{aligned}
&\int^{z_{2p+1}^{(1)}} F_{2p+1}^{(1)}\left(z, \sqrt{R_{2p+1}^{(1)}(z)}\right) dz + \int^{z_{2p+1}^{(2)}} F_{2p+1}^{(2)}\left(z, \sqrt{R_{2p+1}^{(2)}(z)}\right) dz + \cdots \\
&\qquad + \int^{z_{2p+1}^{(a)}} F_{2p+1}^{(a)}\left(z, \sqrt{R_{2p+1}^{(a)}(z)}\right) dz \\
&+ \int^{z_{2p-1}^{(1)}} F_{2p-1}^{(1)}\left(z, \sqrt{R_{2p-1}^{(1)}(z)}\right) dz + \int^{z_{2p-1}^{(2)}} F_{2p-1}^{(2)}\left(z, \sqrt{R_{2p-1}^{(2)}(z)}\right) dz + \cdots \\
&\qquad + \int^{z_{2p-1}^{(b)}} F_{2p-1}^{(b)}\left(z, \sqrt{R_{2p-1}^{(b)}(z)}\right) dz \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
&+ \int^{z_{3}^{(1)}} F_{3}^{(1)}\left(z, \sqrt{R_{3}^{(1)}(z)}\right) dz + \int^{z_{3}^{(2)}} F_{3}^{(2)}\left(z, \sqrt{R_{3}^{(2)}(z)}\right) dz + \cdots \\
&\qquad + \int^{z_{3}^{(r)}} F_{3}^{(r)}\left(z, \sqrt{R_{3}^{(r)}(z)}\right) dz \\
&\qquad = u + A_1 \log v_1 + A_2 \log v_2 + \cdots + A_\nu \log v_\nu,
\end{aligned}
$$

worin

$$u, v_1, v_2, \ldots v_\nu$$

algebraische Functionen von

$$z_{2p+1}^{(1)} \ldots z_{2p+1}^{(a)}, \quad z_{2p-1}^{(1)} \ldots z_{2p-1}^{(b)}, \quad \ldots z_3^{(1)} \ldots z_3^{(r)},$$

und

$$A_1, A_2, \ldots A_\nu$$

Constanten bedeuten; wir nehmen an, dass zwischen den z-Grössen so viel algebraische Beziehungen stattfinden, dass nur

$$z_{2p+1}^{(1)} \ldots z_{2p+1}^{(a)}, \quad z_{2p-1}^{(1)} \ldots z_{2p-1}^{(b)}, \quad \ldots z_{2p-2h+1}^{(1)} \ldots z_{2p-2h+1}^{(g)},$$

von einander unabhängig bleiben, und bringen dann die obige Gleichung auf die Form

$$
\begin{aligned}
(3)\qquad & \int^{z_{2p+1}^{(1)}} F_{2p+1}^{(1)}\left(z, \sqrt{R_{2p+1}^{(1)}(z)}\right) dz + \cdots \\
&+ \int^{z_{2p+1}^{(a)}} F_{2p+1}^{(a)}\left(z, \sqrt{R_{2p+1}^{(a)}(z)}\right) dz \\
&+ \int^{z_{2p-1}^{(1)}} F_{2p-1}^{(1)}\left(z, \sqrt{R_{2p-1}^{(1)}(z)}\right) dz + \cdots \\
&+ \int^{z_{2p-1}^{(b)}} F_{2p-1}^{(b)}\left(z, \sqrt{R_{2p-1}^{(b)}(z)}\right) dz \\
&\quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
&+ \int^{z_{2p-2h+1}^{(1)}} F_{2p-2h+1}^{(1)}\left(z, \sqrt{R_{2p-2h+1}^{(1)}(z)}\right) dz + \cdots \\
&+ \int^{z_{2p-2h+1}^{(g)}} F_{2p-2h+1}^{(g)}\left(z, \sqrt{R_{2p-2h+1}^{(g)}(z)}\right) dz \\
= & - \int^{z_{2p-2h+1}^{(g+1)}} F_{2p-2h+1}^{(g+1)}\left(z, \sqrt{R_{2p-2h+1}^{(g+1)}(z)}\right) dz - \cdots \\
&- \int^{z_{2p-2h+1}^{(k)}} F_{2p-2h+1}^{(k)}\left(z, \sqrt{R_{2p-2h+1}^{(k)}(z)}\right) dz \\
&\quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
&- \int^{z_3^{(1)}} F_3^{(1)}\left(z, \sqrt{R_3^{(1)}(z)}\right) dz - \cdots \\
&- \int^{z_3^{(r)}} F_3^{(r)}\left(z, \sqrt{R_3^{(r)}(z)}\right) dz \\
&+ u + A_1 \log v_1 + \cdots + A_\nu \log v_\nu,
\end{aligned}
$$

worin

$$z_{2p-2h+1}^{(g+1)}, \ldots z_{2p-2h+1}^{(k)}, \ldots z_3^{(1)}, \ldots z_3^{(r)}, \quad u, v_1, v_2, \ldots v_\nu$$

algebraische Functionen der oben bezeichneten unabhängigen Variablen sind.

Es ist leicht zu sehen, dass es eine algebraische Function t der Grössen

$$z_{2p+1}^{(1)}, \ldots z_{2p+1}^{(a)}, z_{2p-1}^{(1)}, \ldots z_{2p-1}^{(b)}, \ldots z_{2p-2h+1}^{(1)}, \ldots z_{2p-2h+1}^{(g)}$$

giebt, so beschaffen, dass

$$
\begin{gathered}
z_{2p-2h+1}^{(g+1)}, \ldots z_{2p-2h+1}^{(k)}, \ldots z_3^{(1)}, \ldots z_3^{(r)}, \\
(\alpha)\qquad \sqrt{R_{2p-2h+1}^{(g+1)}(z_{2p-2h+1}^{(g+1)})}, \ldots \sqrt{R_{2p-2h+1}^{(k)}(z_{2p-2h+1}^{(k)})}, \ldots
\end{gathered}
$$

$$\sqrt{R_3^{(1)}(z_3^{(1)})}, \ldots \sqrt{R_3^{(r)}(z_3^{(r)})}, \quad u, v_1, v_2, \ldots v_\nu$$

rationale Functionen von

$$t, z_{2p+1}^{(1)}, \ldots z_{2p-2h+1}^{(g)}, \sqrt{R_{2p+1}^{(1)}(z_{2p+1}^{(1)})}, \ldots \sqrt{R_{2p-2h+1}^{(g)}(z_{2p-2h+1}^{(g)})}$$

sind; denn bildet man

$$(4) \qquad \begin{aligned} t = {} & a_{2p-2h+1}^{(g+1)} z_{2p-2h+1}^{(g+1)} + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + a_{2p-2h+1}^{(k)} z_{2p-2h+1}^{(k)} \\ & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ & + a_3^{(1)} z_3^{(1)} + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + a_3^{(r)} z_3^{(r)} \\ & + b_{2p-2h+1}^{(g+1)} \sqrt{R_{2p-2h+1}^{(g+1)}(z_{2p-2h+1}^{(g+1)})} + \cdots + b_{2p-2h+1}^{(k)} \sqrt{R_{2p-2h+1}^{(k)}(z_{2p-2h+1}^{(k)})} \\ & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ & + b_3^{(1)} \sqrt{R_3^{(1)}(z_3^{(1)})} + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + b_3^{(r)} \sqrt{R_3^{(r)}(z_3^{(r)})} \\ & + cu + d_1 v_1 + d_2 v_2 + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + d_\nu v_\nu, \end{aligned}$$

worin die a, b, c, d allgemeine Constanten bedeuten, so kann man diese Grösse als lineare Function der Lösungen einer algebraischen Gleichung auffassen, deren Coefficienten rationale Functionen von

$$(\beta) \qquad z_{2p+1}^{(1)}, \ldots z_{2p+1}^{(a)}, z_{2p-1}^{(1)}, \ldots z_{2p-1}^{(b)}, z_{2p-2h+1}^{(1)}, \ldots z_{2p-2h+1}^{(g)}$$

sind, und die man erhält, wenn man alle algebraischen Gleichungen mit einander multiplicirt, deren Lösungen die Grössen (α) sind, welche als algebraische Functionen der Grössen (β) vorausgesetzt wurden. Bildet man nun eine Reihe anderer linearer Functionen von der Form (4), so kann man bekanntlich alle diese rationalen ähnlichen Functionen rational durch

$$(\gamma) \qquad z_{2p+1}^{(1)}, \ldots z_{2p+1}^{(a)}, z_{2p-1}^{(1)}, \ldots z_{2p-1}^{(b)}, \ldots z_{2p-2h+1}^{(1)}, \ldots z_{2p-2h+1}^{(g)}, t$$

ausdrücken, und wenn man somit soviel lineare Ausdrücke herstellt als die Anzahl der Grössen (α) beträgt, so wird man mit Hülfe dieser linearen Gleichungen jede einzelne dieser Grössen rational durch die Grössen (γ) ausdrücken können. Man denke sich ferner die die algebraische Function t definirende Gleichung, welche aus der Form der Grösse t nach (4) bekanntlich durch Permutation aller Lösungen der oben gebildeten algebraischen Gleichung, deren Lösungen auch die Grössen (α) sind, leicht hergestellt werden kann, in Factoren zerlegt, deren Coefficienten nicht bloss rational die Grössen (β) sondern auch die dazu gehörigen Irrationalitäten

$$(\delta)\qquad \sqrt{R^{(1)}_{2p+1}(z^{(1)}_{2p+1})}, \dots \sqrt{R^{(a)}_{2p+1}(z^{(a)}_{2p+1})}, \dots \sqrt{R^{(1)}_{2p-2h+1}(z^{(1)}_{2p-2h+1})}, \dots \\ \dots \sqrt{R^{(g)}_{2p-2h+1}(z^{(g)}_{2p-2h+1})}$$

enthalten dürfen, und den irreductiblen Factor herausgewählt und gleich Null gesetzt, der t zu einer seiner Lösungen hat,

$$(5)\qquad V = 0,$$

so dass t nicht mehr die Lösung einer Gleichung niederen Grades sein kann, deren Coefficienten ebenfalls rational aus den Grössen (β) und (δ) zusammengesetzt sind. Differentiirt man nunmehr die Gleichung (2) total, indem man die Grössen (β) als unabhängige Variablen betrachtet, so wird man eine Gleichung von der Form

$$(6)\qquad P^{(1)}_{2p+1} dz^{(1)}_{2p+1} + \dots + P^{(a)}_{2p+1} dz^{(a)}_{2p+1} + \dots + P^{(1)}_{2p-2h+1} dz^{(1)}_{2p-2h+1} + \dots \\ + P^{(g)}_{2p-2h+1} dz^{(g)}_{2p-2h+1} = 0$$

erhalten, in welcher nach dem Obigen die Grössen P als rationale Functionen der Grössen (γ) und (δ) betrachtet werden dürfen, und es wird sich als unmittelbare Folge von (6)

$$(7)\qquad P^{(1)}_{2p+1} = 0, \dots P^{(a)}_{2p+1} = 0, \dots P^{(1)}_{2p-2h+1} = 0, \dots P^{(g)}_{2p-2h+1} = 0$$

ergeben. Da nun die einzelnen Gleichungen in (7) als Gleichungen in t aufgefasst werden dürfen, deren Coefficienten rationale Funktionen der Grössen (β) und (δ) sind, und die Gleichung (5) irreductibel war, so müssen sämmtliche Lösungen der Gleichung (5), welche wir jetzt mit

$$t_1, t_2, \dots t_\delta$$

bezeichnen wollen, und unter welchen das frühere t mit enthalten ist, den Gleichungen (7) genügen. Da nun aber aus den Gleichungen (7) die Beziehung (6) unmittelbar folgt, so wird auch, wenn man die zu t_α gehörigen Werthe der Grössen (α) mit

$$\overset{(\alpha)}{z}{}^{(g+1)}_{2p-2h+1}, \dots \overset{(\alpha)}{z}{}^{(k)}_{2p-2h+1}, \dots \overset{(\alpha)}{z}{}^{(1)}_{3}, \dots \overset{(\alpha)}{z}{}^{(r)}_{3},$$

$$(\varepsilon)\qquad \sqrt{R^{(g+1)}_{2p-2h+1} \overset{(\alpha)}{z}{}^{(g+1)}_{2p-2h+1})}, \dots \sqrt{R^{(k)}_{2p-2h+1}(\overset{(\alpha)}{z}{}^{(k)}_{2p-2h+1})}, \dots \sqrt{R^{(1)}_{3}(\overset{(\alpha)}{z}{}^{(1)}_{3})}, \dots \sqrt{R^{(r)}_{3}(z_{(r)})},$$

$$\overset{(\alpha)}{u}, \overset{(\alpha)}{v}_1, \overset{(\alpha)}{v}_2, \dots \overset{(\alpha)}{v}_\nu$$

bezeichnet, für diesen neuen Grössencomplex die Gleichung (3) gelten müssen, und wenn man daher die so entstehenden δ Gleichungen addirt, die Beziehung folgen

$$
\begin{aligned}
(8)\qquad & \delta\Bigg\{\int^{z_{2p+1}^{(1)}} F_{2p+1}^{(1)}\left(z,\sqrt{R_{2p+1}^{(1)}(z)}\right)dz+\cdots \\
& +\int^{z_{2p+1}^{(a)}} F_{2p+1}^{(a)}\left(z,\sqrt{R_{2p+1}^{(a)}(z)}\right)dz \\
& \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
& +\int^{z_{2p-2h+1}^{(1)}} F_{2p-2h+1}^{(1)}\left(z,\sqrt{R_{2p-2h+1}^{(1)}(z)}\right)dz+\cdots \\
& +\int^{z_{2p-2h+1}^{(g)}} F_{2p-2h+1}^{(g)}\left(z,\sqrt{R_{2p-2h+1}^{(g)}(z)}\right)dz\Bigg\} \\
= & -\sum_{\alpha=1}^{\delta}\int^{\overset{(\alpha)}{z}{}_{2p-2h+1}^{(g+1)}}(g+1)F_{2p-2h+1}^{(g+1)}\left(z,\sqrt{R_{2p-2h+1}^{(g+1)}(z)}\right)dz-\ldots \\
& -\sum_{\alpha=1}^{\delta}\int^{\overset{(\alpha)}{z}{}_{2p-2h+1}^{(k)}} F_{2p-2h+1}^{(k)}\left(z,\sqrt{R_{2p-2h+1}^{(k)}(z)}\right)dz \\
& \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
& -\sum_{\alpha=1}^{\delta}\int^{\overset{(\alpha)}{z}{}_{3}^{(1)}} F_{3}^{(1)}\left(z,\sqrt{R_{3}^{(1)}(z)}\right)dz-\cdots \\
& -\sum_{\alpha=1}^{\delta}\int^{\overset{(\alpha)}{z}{}_{3}^{(r)}} F_{3}^{(r)}\left(z,\sqrt{R_{3}^{(r)}(z)}\right)dz \\
& +\sum_{\alpha=1}^{\delta}\overset{(\alpha)}{u}+A_1\sum_{\alpha=1}^{\delta}\log\overset{(\alpha)}{v}_1+\cdots+A_\nu\sum_{\alpha=1}^{\delta}\log\overset{(\alpha)}{v}_\nu.
\end{aligned}
$$

Es ist klar, dass

$$\sum_{\alpha=1}^{\delta}\overset{(\alpha)}{u}=u'$$

als symmetrische Function von

$$t_1, t_2, \ldots t_\delta,$$

deren Coefficienten rationale Functionen der Grössen (β) sind, sich rational durch die Coefficienten der Gleichung (5) ausdrücken lässt, deren Lösungen jene Grössen vorstellen, und dass daher jene Summe eine rationale Function der Grössen (β) und (δ) sein wird; dasselbe gilt von der Grösse

$$\overset{(1)}{v}_\sigma\cdot\overset{(2)}{v}_\sigma\cdots\overset{(\delta)}{v}_\sigma=v'_\sigma.$$

Was nun die auf der rechten Seite der obigen Gleichung befindlichen Summen gleichartiger hyperelliptischer Integrale betrifft, so wollen wir die beiden Fälle unterscheiden, in denen in dem Ausdruck

$$\sum_{\alpha=1}^{\delta} \int^{\overset{(\alpha)}{z}{}^{(m)}_{2p-2s+1}} F^{(m)}_{2p-2s+1}\left(z, \sqrt{R^{(m)}_{2p-2s+1}(z)}\right) dz$$

$\delta > p - s$ oder $\delta \leqq p - s$ ist. Wenn das erstere der Fall, so lässt sich die Summe dieser Integrale mittels des Abel'schen Theorems in die Summe von $p - s$ Integralen verwandeln, deren Gränzen die Lösungen einer Gleichung vom $(p-s)^{\text{ten}}$ Grade sind, deren Coefficienten rational und symmetrisch aus den Grössen

$$\overset{(\alpha)}{z}{}^{(m)}_{2p-2s+1} \text{ und } \sqrt{R^{(m)}_{2p-2s+1}(\overset{(\alpha)}{z}{}^{(m)}_{2p-2s+1})},$$

also auch nach dem Obigen rational und symmetrisch aus den Grössen (β) und

$$t_1, \ t_2, \ \ldots \ t_\delta$$

zusammengesetzt sind und sich daher vermöge der Gleichung (5) rational durch die Grössen (β) und (δ) ausdrücken lassen, während die zugehörigen Irrationalitäten mit Hülfe dieser Grössen rational mit den entsprechenden oberen Gränzen zusammenhängen. Ist dagegen $\delta \leqq p - s$, so kann man jedenfalls die Grössen

$$\overset{(\alpha)}{z}{}^{(m)}_{2p-2s+1}$$

als Lösungen einer Gleichung des δ^{ten} Grades betrachten, deren Coefficienten rational und symmetrisch aus den Grössen (β) und $t_1, \ t_2, \ \ldots \ t_\delta$ zusammengesetzt sind und sich daher wieder rational durch die Grössen (β) und (δ) ausdrücken lassen, während

$$\overset{(\alpha)}{z}{}^{(m)}_{2p-2s+1} \text{ und } \sqrt{R^{(m)}_{2p-2s+1}(\overset{(\alpha)}{z}{}^{(m)}_{2p-2s+1})}$$

als ähnliche rationale Functionen der Lösungen der Gleichung (5) aufgefasst werden können, da jede Vertauschung der t-Lösungen eine gemeinsame Aenderung der beiden Grössen hervorbringt, und somit die zweite der beiden Grössen sich mit Hülfe der Grössen (β) und (δ) rational durch die erste ausdrücken lassen wird. In allen Fällen also (indem wir die Gleichung niederen Grades als eine höheren Grades mit verschwindenden Coefficienten betrachten) wird sich je eine Summe der rechten Seite in eine Summe von $p - s$ gleichartigen hyperelliptischen Integralen verwandeln lassen, deren Gränzen Lösungen einer Gleichung $(p-s)^{\text{ten}}$ Grades sind, deren Coefficienten rational aus den Grössen (β) und (δ) zusammengesetzt sind, und deren Irrationalitäten mit Hülfe eben dieser Grössen durch die resp. Gränzen rational ausdrückbar sind. Es folgt somit, dass, *wenn man die Gleichung* (3) *dadurch befriedigen kann, dass die Grössen*

$$z_{2p-2h+1}^{(g+1)}, \dots z_{2p-2h+1}^{(k)}, \dots z_3^{(1)}, \dots z_3^{(r)}, \;\; u, \;\; v_1, \;\; \dots v_\nu$$

algebraische Functionen der Grössen (β) *sind, man die Gleichung*

$$\begin{aligned}
(9) \qquad & \delta\Bigg\{\int^{z_{2p+1}^{(1)}} F_{2p+1}^{(1)}\left(z, \sqrt{R_{2p+1}^{(1)}(z)}\right) dz + \cdots \\
& + \int^{z_{2p+1}^{(a)}} F_{2p+1}^{(a)}\left(z, \sqrt{R_{2p+1}^{(a)}(z)}\right) dz \\
& \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
& + \int^{z_{2p-2h+1}^{(1)}} F_{2p-2h+1}^{(1)}\left(z, \sqrt{R_{2p-2h+1}^{(1)}(z)}\right) dz + \cdots \\
& + \int^{z_{2p-2h+1}^{(g)}} F_{2p-2h+1}^{(g)}\left(z, \sqrt{R_{2p-2h+1}^{(g)}(z)}\right) dz \Bigg\} \\
& = -\sum_{\alpha=1}^{p-h} \int^{\overset{(\alpha)}{z}{}_{2p-2h+1}^{(g+1)}} F_{2p-2h+1}^{(g+1)}\left(z, \sqrt{R_{2p-2h+1}^{(g+1)}(z)}\right) dz - \cdots \\
& - \sum_{\alpha=1}^{p-h} \int^{\overset{(\alpha)}{z}{}_{2p-2h+1}^{(k)}} F_{2p-2h+1}^{(k)}\left(z, \sqrt{R_{2p-2h+1}^{(k)}(z)}\right) dz \\
& - \sum_{\alpha=1}^{1} \int^{\overset{(\alpha)}{z}{}_3^{(1)}} F_3^{(1)}\left(z, \sqrt{R_3^{(1)}(z)}\right) dz - \cdots \\
& - \sum_{\alpha=1}^{1} \int^{\overset{(\alpha)}{z}{}_3^{(r)}} F_3^{(r)}\left(z, \sqrt{R_3^{(r)}(z)}\right) dz \\
& + U + B_1 \log V_1 + B_2 \log V_2 + \cdots + B_\varrho \log V_\varrho,
\end{aligned}$$

in welcher die von der Addition der hyperelliptischen Integrale herrührenden algebraisch-logarithmischen Theile mit den u' *und* v' *vereinigt sind, und deren linke Seite das* δ*-fache der linken Seite von* (3), *deren rechte Seite dieselben hyperelliptischen Integrale nur für andere obere Gränzen enthält, dadurch muss befriedigen können, dass die zu je einer Summe gehörigen* z*-Werthe Lösungen von Gleichungen des durch die obere Gränze des Summationszeichens gegebenen Grades sind, deren Coefficienten rational aus den Grössen* (β) *und* (δ) *zusammengesetzt sind, und dass die zugehörigen Irrationalitäten sich* *mit Hülfe eben dieser Grössen durch die resp. z-Werthe rational ausdrücken, während*

$$U,\ V_1,\ V_2,\ \dots V_\varrho$$

rationale Functionen eben dieser Grössen sind.

Wir können die Reduction des Problems jedoch noch weiter führen. Zuerst ist nämlich ersichtlich, dass man von den unabhängigen Variablen

$$z_{2p+1}^{(1)}, \dots z_{2p+1}^{(\alpha)}, \dots z_{2p-2h+1}^{(1)}, \dots z_{2p-2h+1}^{(g)}$$

alle mit Ausnahme einer, z. B. $z_{2p+1}^{(1)}$ den resp. unteren Gränzen gleichsetzen kann, so dass auf der linken Seite der Gleichung (9) nur *ein* solches Integral stehen bleibt, und dass umgekehrt, wenn jedes der links stehenden Integrale sich in der verlangten Weise transformirt, die Zusammensetzung aller dieser Beziehungen eine Gleichung von der Form (9) liefern wird, wie aus dem Abel'schen Theorem hervorgeht, so dass wir die Untersuchung nur auf den Fall zu beschränken haben, dass

$$\begin{aligned}
(10)\qquad & \delta \int^{z_{2p+1}^{(1)}} F_{2p+1}^{(1)}\left(z, \sqrt{R_{2p+1}^{(1)}(z)}\right) dz \\
&= -\sum_{\alpha=1}^{p-h} \int^{\overset{(\alpha)}{\zeta}{}_{2p-2h+1}^{(g+1)}} F_{2p-2h+1}^{(g+1)}\left(z, \sqrt{R_{2p-2h+1}^{(g+1)}(z)}\right) dz - \cdots \\
&\quad -\sum_{\alpha=1}^{p-h} \int^{\overset{(\alpha)}{\zeta}{}_{2p-2h+1}^{(k)}} F_{2p-2h+1}^{(k)}\left(z, \sqrt{R_{2p-2h+1}^{(k)}(z)}\right) dz \\
&\quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
&\quad -\sum_{\alpha=1}^{1} \int^{\overset{(\alpha)}{\zeta}{}_{3}^{(1)}} F_{3}^{(1)}\left(z, \sqrt{R_{3}^{(1)}(z)}\right) dz - \cdots \\
&\quad -\sum_{\alpha=1}^{1} \int^{\overset{(\alpha)}{\zeta}{}_{3}^{(r)}} F_{3}^{(r)}\left(z, \sqrt{R_{3}^{(r)}(z)}\right) dz \\
&\quad + U' + B_1' \log V_1' + B_2' \log V_2' + \cdots + B_\varrho' \log V_\varrho'
\end{aligned}$$

ist, worin die zu je einer Summe gehörigen ζ-Werthe Lösungen von Gleichungen des durch die obere Gränze des Summationszeichens gegebenen Grades sind, deren Coefficienten rational aus den Grössen

$$z_{2p+1}^{(1)} \text{ und } \sqrt{R_{2p+1}^{(1)}(z_{2p+1}^{(1)})}$$

zusammengesetzt sind, und die Irrationalitäten sich mit Hülfe eben dieser Grössen rational durch die zugehörige ζ-Grösse ausdrücken lassen, während

$$U', V_1', V_2', \dots V_\sigma'$$

rationale Functionen eben dieser Grössen sind.

Zur weiteren Behandlung des Transformationsproblems ist es nöthig, die Eigenschaften solcher Werthereihen näher kennen zu lernen, welche wir der Kürze halber, wenn $R_1(y)$ ein Polynom $(2\sigma+1)^{\text{ten}}$ Grades in y bedeutet, mit

$$y_1, y_2 \dots y_\sigma$$
$$\sqrt{R_1(y_1)}, \sqrt{R_1(y_2)}, \dots \sqrt{R_1(y_\sigma)},$$

bezeichnen, und von denen wir voraussetzen, dass die erste dieser Reihen die Lösungen einer Gleichung des σ^{ten} Grades vorstellt, deren Coefficienten rationale Functionen von

$$z_{2p+1}^{(1)} \text{ und } \sqrt{R_{2p+1}^{(1)}(z_{2p+1}^{(1)})}$$

sind, die wir hier der Kürze halber mit

$$z_1 \text{ und } \sqrt{R(z_1)}$$

bezeichnen wollen, während die Glieder der zweiten Reihe sich mit Hülfe eben dieser Grössen durch die resp. y rational ausdrücken lassen. Sei jene algebraische Gleichung

$$y^\sigma + f_1\big(z_1, \sqrt{R(z_1)}\,\big)y^{\sigma-1} + \cdots + f_{\sigma-1}\big(z_1, \sqrt{R(z_1)}\,\big)y + f_\sigma\big(z_1, \sqrt{R(z_1)}\,\big) = 0, \tag{11}$$

in welcher

$$f_1\big(z_1, \sqrt{R(z_1)}\,\big),\ f_2\big(z_1, \sqrt{R(z_1)}\,\big),\ \dots f_\sigma\big(z_1, \sqrt{R(z_1)}\,\big)$$

rationale Functionen der in ihnen enthaltenen Grössen bedeuten, so folgt durch Differentiation nach z_1, indem man y successive $y_1, y_2, \dots y_\sigma$ gleichsetzt,

$$\begin{aligned}
dy_1 &= F\big(y_1, z_1, \sqrt{R(z_1)}\,\big)\, dz_1, \\
dy_2 &= F\big(y_2, z_1, \sqrt{R(z_1)}\,\big)\, dz_1, \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
dy_\sigma &= F\big(y_\sigma, z_1, \sqrt{R(z_1)}\,\big)\, dz_1,
\end{aligned} \tag{12}$$

worin F eine rationale Function der in ihr enthaltenen Grössen bedeutet, und in Folge dessen, wenn

$$a_0 + a_1 y + a_2 y^2 + \cdots + a_{\sigma-1} y^{\sigma-1} = f(y)$$

gesetzt wird,

$$\frac{f(y_1)dy_1}{\sqrt{R_1(y_1)}} + \frac{f(y_2)dy_2}{\sqrt{R_1(y_2)}} + \cdots + \frac{f(y_\sigma)dy_\sigma}{\sqrt{R_1(y_\sigma)}} = \sum_{\alpha=1}^{\sigma} \frac{f(y_\alpha)F\big(y_\alpha, z_1, \sqrt{R_1(z_1)}\,\big)}{\sqrt{R_1(y_\alpha)}}\, dz_1. \tag{13}$$

Da nun der Voraussetzung nach $\sqrt{R_1(y_\alpha)}$ sich mit Hülfe der Grössen z_1 und $\sqrt{R(z_1)}$ rational durch y_α ausdrücken lässt, so wird die rechte Seite der Gleichung (13) eine rationale symmetrische Function von

$$y_1, y_2, \dots y_\sigma$$

sein und sich somit mit Hülfe von Gleichung (11) rational durch z_1 und $\sqrt{R(z_1)}$ ausdrücken lassen, so dass sich

$$\frac{f(y_1)dy_1}{\sqrt{R_1(y_1)}} + \frac{f(y_2)dy_2}{\sqrt{R_1(y_2)}} + \dots + \frac{f(y_\sigma)dy_\sigma}{\sqrt{R_1(y_\sigma)}} = \varphi\big(z_1, \sqrt{R(z_1)}\big)dz_1 \tag{14}$$

ergiebt, worin

$$\varphi\big(z_1, \sqrt{R(z_1)}\big)$$

eine rationale Function der in ihr enthaltenen Grössen bedeutet. Die Integration der linken Seite wird nur Integrale erster Gattung liefern, also nie einen unendlich grossen Werth annehmen können, dasselbe muss also mit der rechten Seite der Fall sein und daher nach der früher aufgestellten allgemeinen Form des Integrales erster Gattung, da $R(z_1)$ vom $(2p+1)^{\text{ten}}$ Grade sein sollte, wenn

$$A_0 + A_1 z_1 + A_2 z_1^2 + \dots + A_{p-1} z_1^{p-1} = F(z_1)$$

gesetzt wird,

$$\frac{f(y_1)\,dy_1}{\sqrt{R_1(y_1)}} + \frac{f(y_2)\,dy_2}{\sqrt{R_1(y_2)}} + \dots + \frac{f(y_\sigma)\,dy_\sigma}{\sqrt{R_1(y_\sigma)}} = \frac{F(z_1)\,dz_1}{\sqrt{R_1(z_1)}} \tag{15}$$

sein, oder durch Specialisirung der Constanten $a_0, a_1, \dots a_{\sigma-1}$,

$$\begin{aligned}
&\frac{dy_1}{\sqrt{R_1(y_1)}} + \frac{dy_2}{\sqrt{R_1(y_2)}} + \dots + \frac{dy_\sigma}{\sqrt{R_1(y_\sigma)}} = \frac{F_0(z_1)\,dz_1}{\sqrt{R(z_1)}},\\
&\frac{y_1 dy_1}{\sqrt{R_1(y_1)}} + \frac{y_2 dy_2}{\sqrt{R_1(y_2)}} + \dots + \frac{y_\sigma dy_\sigma}{\sqrt{R_1(y_\sigma)}} = \frac{F_1(z_1)\,dz_1}{\sqrt{R(z_1)}},\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
&\frac{y_1^{\sigma-1} dy_1}{\sqrt{R_1(y_1)}} + \frac{y_2^{\sigma-1} dy_2}{\sqrt{R_1(y_2)}} + \dots + \frac{y_\sigma^{\sigma-1} dy_\sigma}{\sqrt{R_1(y_\sigma)}} = \frac{F_{\sigma-1}(z_1)\,dz_1}{\sqrt{R(z_1)}},
\end{aligned} \tag{16}$$

und *es ist somit das allgemeine Transformationsproblem auf die Untersuchung solcher Gleichungen* (11) *zurückgeführt, vermöge welcher ein Gleichungssystem von der Form* (16) *erfüllt wird.*

Bevor wir zur Untersuchung des allgemeinen Transformationsproblems zurückkehren, mag die Reduction des Problems noch so weit geführt werden, wie es wieder in der rationalen Transformationstheorie aufzunehmen ist. Nehmen wir nämlich an, dass im

Allgemeinen σ nicht kleiner als p ist, d. h. dass man es nicht mit einem hyperelliptischen Integrale zu thun hat, das auf Integrale niederer Gattung reducirbar ist, so wird man, wie leicht zu sehen, die Coefficienten $a_0, a_1, \ldots a_{\sigma-1}$ so bestimmen können, dass $F(z_1)$ successive die Werthe

$$1, z_1, z_1^2, \ldots z_1^{p-1}$$

annimmt, und wenn man die zugehörigen f-Functionen mit

$$f_0(y), f_1(y), \ldots f_{p-1}(y)$$

bezeichnet, so folgt

$$\tag{17} \begin{aligned} \frac{dz_1}{\sqrt{R(z_1)}} &= \frac{f_0(y_1)\,dy_1}{\sqrt{R_1(y_1)}} + \frac{f_0(y_2)\,dy_2}{\sqrt{R_1(y_2)}} + \cdots + \frac{f_0(y_\sigma)\,dy_\sigma}{\sqrt{R_1(y_\sigma)}}, \\ \frac{z_1 dz_1}{\sqrt{R(z_1)}} &= \frac{f_1(y_1)\,dy_1}{\sqrt{R_1(y_1)}} + \frac{f_1(y_2)\,dy_2}{\sqrt{R_1(y_2)}} + \cdots + \frac{f_1(y_\sigma)\,dy_\sigma}{\sqrt{R_1(y_\sigma)}}, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \frac{z_1^{p-1} dz_1}{\sqrt{R(z_1)}} &= \frac{f_{p-1}(y_1)\,dy_1}{\sqrt{R_1(y_1)}} + \frac{f_{p-1}(y_2)\,dy_2}{\sqrt{R_1(y_2)}} + \cdots + \frac{f_{p-1}(y_\sigma)\,dy_\sigma}{\sqrt{R_1(y_\sigma)}}. \end{aligned}$$

Führt man nun $p-1$ neue Variable ein

$$z_2,\ z_3,\ \ldots z_p,$$

denen nach Gleichung (11) die Werthereihen

$$\begin{array}{lll} y_1', & y_2', & \cdots\ y_\sigma', \\ y_1'', & y_2'', & \cdots\ y_\sigma'', \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ y_1^{(p-1)}, & y_2^{(p-1)}, & \cdots\ y_\sigma^{(p-1)} \end{array}$$

entsprechen mögen, während die zugehörigen Irrationalitäten aus den früheren Ausdrücken nur durch Vertauschung der y hergeleitet werden, so werden wir $p-1$ dem Systeme (17) analoge Gleichungssysteme aufstellen können, in denen die f-Functionen dieselben sind. Addirt man der Reihe nach alle ersten, zweiten, $\ldots p^{\text{ten}}$ Gleichungen, so werden sich nach dem Abel'schen Theorem für die rechten Seiten dieser Gleichungen die folgenden Formen ergeben

$$
\begin{aligned}
&\frac{f_r(y_1)\,dy_1}{\sqrt{R_1(y_1)}} + \frac{f_r(y_2)\,dy_2}{\sqrt{R_1(y_2)}} + \dots\dots\dots\dots + \frac{f_r(y_\sigma)\,dy_\sigma}{\sqrt{R_1(y_\sigma)}}\\
&+ \frac{f_r(y_1')\,dy_1'}{\sqrt{R_1(y_1')}} + \frac{f_r(y_2')\,dy_2'}{\sqrt{R_1(y_2')}} + \dots\dots\dots\dots + \frac{f_r(y_\sigma')\,dy_\sigma'}{\sqrt{R_1(y_\sigma')}}\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
&+ \frac{f_r\bigl(y_1^{(p-1)}\bigr)\,dy_1^{(p-1)}}{\sqrt{R_1\bigl(y_1^{(p-1)}\bigr)}} + \frac{f_r\bigl(y_2^{(p-1)}\bigr)\,dy_2^{(p-1)}}{\sqrt{R_1\bigl(y_2^{(p-1)}\bigr)}} + \dots + \frac{f_r\bigl(y_\sigma^{(p-1)}\bigr)\,dy_\sigma^{(p-1)}}{\sqrt{R_1\bigl(y_\sigma^{(p-1)}\bigr)}}\\
&= \frac{f_r(Y_1)\,dY_1}{\sqrt{R_1(Y_1)}} + \frac{f_r(Y_2)\,dY_2}{\sqrt{R_1(Y_2)}} + \dots\dots\dots\dots + \frac{f_r(Y_\sigma)\,dY_\sigma}{\sqrt{R_1(Y_\sigma)}},
\end{aligned}
$$

in denen

$$Y_1,\ Y_2,\ \dots Y_\sigma$$

die Lösungen einer Gleichung σ^{ten} Grades sind, deren Coefficienten rational und symmetrisch aus allen Grössen y und den dazu gehörigen Irrationalitäten zusammengesetzt sind und sich daher nach dem Früheren rational und symmetrisch durch

$$z_1,\ z_2,\ \dots z_p,\ \sqrt{R(z_1)},\ \sqrt{R(z_2)},\ \dots \sqrt{R(z_p)}$$

ausdrücken lassen, während die zugehörigen Irrationalitäten mit Hülfe eben dieser Grössen rational durch die Y ausdrückbar sind.

Fassen wir diese Resultate zusammen, so führt das allgemeine Transformationsproblem auf die Differentialgleichungen:

$$
\begin{aligned}
&\frac{dz_1}{\sqrt{R(z_1)}} + \frac{dz_2}{\sqrt{R(z_2)}} + \dots + \frac{dz_p}{\sqrt{R(z_p)}}\\
&= \frac{f_0(Y_1)\,dY_1}{\sqrt{R_1(Y_1)}} + \frac{f_0(Y_2)\,dY_2}{\sqrt{R_1(Y_2)}} + \dots + \frac{f_0(Y_\sigma)\,dY_\sigma}{\sqrt{R_1(Y_\sigma)}},\\
&\frac{z_1\,dz_1}{\sqrt{R(z_1)}} + \frac{z_2\,dz_2}{\sqrt{R(z_2)}} + \dots + \frac{z_p\,dz_p}{\sqrt{R(z_p)}}\\
&= \frac{f_1(Y_1)\,dY_1}{\sqrt{R_1(Y_1)}} + \frac{f_1(Y_2)\,dY_2}{\sqrt{R_1(Y_2)}} + \dots + \frac{f_1(Y_\sigma)\,dY_\sigma}{\sqrt{R_1(Y_\sigma)}},\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
&\frac{z_1^{p-1}dz_1}{\sqrt{R(z_1)}} + \frac{z_2^{p-1}dz_2}{\sqrt{R(z_2)}} + \dots + \frac{z_p^{p-1}dz_p}{\sqrt{R(z_p)}}\\
&= \frac{f_{p-1}(Y_1)\,dY_1}{\sqrt{R_1(Y_1)}} + \frac{f_{p-1}(Y_2)\,dY_2}{\sqrt{R_1(Y_2)}} + \dots + \frac{f_{p-1}(Y_\sigma)\,dY_\sigma}{\sqrt{R_1(Y_\sigma)}},
\end{aligned}
\tag{18}
$$

in welchen

$$Y_1, Y_2, \dots Y_\sigma$$

die Lösungen einer Gleichung σ^{ten} *Grades sein sollen, deren Coefficienten rational und symmetrisch aus*

$$z_1, z_2, \dots z_p, \sqrt{R(z_1)}, \sqrt{R(z_2)}, \dots \sqrt{R(z_p)}$$

zusammengesetzt sind, während die zugehörigen Irrationalitäten mit Hülfe eben dieser Grössen rational mit den resp. Y *zusammenhängen.*

Endlich mag noch der folgenden Vereinfachung des durch die Gleichungen (16) dargestellten Transformationsproblems Erwähnung geschehen, welche die entsprechende Vereinfachung des durch die Gleichungen (18) ausgedrückten nach sich zieht, und welche sowohl für die allgemeine Transformationstheorie als auch für die Behandlung der Frage der Integralrechnung, welche hyperelliptischen Integrale irgend einer Ordnung auf solche niederer Ordnung reducirbar sind, von Wichtigkeit ist.

Greifen wir eine der Gleichungen des Systemes (16) heraus

$$(19) \qquad \frac{y_1^k\, dy_1}{\sqrt{R_1(y_1)}} + \frac{y_2^k\, dy_2}{\sqrt{R_1(y_2)}} + \cdots + \frac{y_\sigma^k\, dy_\sigma}{\sqrt{R_1(y_\sigma)}} = \frac{F_k(z_1)\, dz_1}{\sqrt{R(z_1)}},$$

für welche die Grössen

$$y_1, y_2, \dots y_\sigma$$

Lösungen der Gleichung

$$(20) \qquad y^\sigma + f_1\big(z_1, \sqrt{R(z_1)}\big) y^{\sigma-1} + \cdots + f_\sigma\big(z_1, \sqrt{R(z_1)}\big) = 0$$

sind, während die zu ihnen gehörigen Irrationalitäten durch die in den angegebenen Grössen rationalen Functionalausdrücke von der Form

$$(21) \qquad \sqrt{R_1(y_r)} = \varphi\big(y_r, z_1, \sqrt{R_1(z_1)}\big)$$

bestimmt sind, so werden, wenn wir

$$-\sqrt{R_1(z_1)} \quad \text{statt} \quad \sqrt{R_1(z_1)}$$

setzen, die Lösungen der Gleichung (20) $y_1, y_2, \dots y_\sigma$ in die Lösungen der Gleichung

$$(22) \qquad \eta^\sigma + f_1\big(z_1, -\sqrt{R_1(z_1)}\big) \eta^{\sigma-1} + \cdots + f^\sigma\big(z_1, -\sqrt{R_1(z_1)}\big) = 0$$

übergehen, welche wir mit

$$\eta_1, \eta_2, \dots \eta_\sigma$$

bezeichnen wollen, während die zugehörigen Irrationalitäten durch die Gleichung

$$\sqrt{R(\eta_r)} = \varphi\big(\eta_r, z_1, -\sqrt{R_1(z_1)}\big) \tag{23}$$

bestimmt sein werden, und wenn wir die so entstehende Differentialgleichung

$$\frac{\eta_1^k\,d\eta_1}{\sqrt{R_1(\eta_1)}} + \frac{\eta_2^k\,d\eta_2}{\sqrt{R_1(\eta_2)}} + \dots + \frac{\eta_\sigma^k\,d\eta_\sigma}{\sqrt{R_1(\eta_\sigma)}} = -\frac{F_k(z_1)\,dz_1}{\sqrt{R(z_1)}} \tag{24}$$

durch Subtraction mit der Gleichung (19) verbinden, so folgt die Beziehung

$$\left.\begin{array}{r} \dfrac{y_1^k\,dy_1}{\sqrt{R_1(y_1)}} + \dfrac{y_2^k\,dy_2}{\sqrt{R_1(y_2)}} + \dots + \dfrac{y_\sigma^k\,dy_\sigma}{\sqrt{R_1(y_\sigma)}} \\ -\dfrac{\eta_1^k\,d\eta_1}{\sqrt{R_1(\eta_1)}} - \dfrac{\eta_2^k\,d\eta_2}{\sqrt{R_1(\eta_2)}} - \dots - \dfrac{\eta_\sigma^k\,d\eta_\sigma}{\sqrt{R_1(\eta_\sigma)}} \end{array}\right\} = 2\frac{F_k(z_1)\,dz_1}{\sqrt{R_1(z_1)}}, \tag{25}$$

die nunmehr genauer untersucht werden soll.

Ist σ eine *grade* Zahl, so setze man

$$m = \frac{3\sigma}{2},$$

bezeichne mit $p(y)$ eine ganze Function m^{ten} Grades von y, mit $q(y)$ eine ganze Function $m-\sigma-1^{\text{ten}}$ Grades derselben Variabeln, und bestimme in der Gleichung

$$p(y) - q(y)\sqrt{R_1(y)},$$

oder in

$$\begin{aligned} a_m y^m + a_{m-1}y^{m-1} + \dots + a_1 y + a_0 - b_{m-\sigma-1}y^{m-\sigma-1}\sqrt{R_1(y)} \\ -b_{m-\sigma-2}y^{m-\sigma-2}\sqrt{R_1(y)} - \dots - b_0\sqrt{R_1(y)} = 0 \end{aligned} \tag{26}$$

die

$$2m - \sigma + 1 = 2\sigma + 1$$

Constanten

$$a_m, a_{m-1}, \dots a_1, a_0, b_{m-\sigma-1}, b_{m-\sigma-2}, \dots b_1, b_0$$

so, dass dieselbe durch die 2σ Werthe

$$y_1, y_2, \dots y_\sigma, \eta_1, \eta_2, \dots \eta_\sigma \tag{α}$$

und die dazugehörigen Irrationalitäten

$$\sqrt{R_1(y_1)}, \sqrt{R_1(y_2)}, \dots \sqrt{R_1(y_\sigma)}, -\sqrt{R_1(\eta_1)}, -\sqrt{R_1(\eta_2)}, \dots -\sqrt{R_1(\eta_\sigma)} \tag{β}$$

befriedigt wird; dann weiss man nach dem Abel'schen Theorem, dass die Gleichung

$$p(y)^2 - q(y)^2 R_1(y) = 0, \tag{27}$$

welche vom $2m = 3\sigma^{\text{ten}}$ Grade ist, ausser den Lösungen (α) noch σ andere Wurzeln

$$Y_1, Y_2, \dots Y_\sigma \tag{γ}$$

besitzt, welche mit den Grössen (α) und (β) durch die transcendente Beziehung verbunden sind

$$\begin{aligned}
&\frac{y_1^k\,dy_1}{\sqrt{R_1(y_1)}} + \frac{y_2^k\,dy_2}{\sqrt{R_1(y_2)}} + \dots + \frac{y_\sigma^k\,dy_\sigma}{\sqrt{R_1(y_\sigma)}} \\
&-\frac{\eta_1^k\,d\eta_1}{\sqrt{R_1(\eta_1)}} - \frac{\eta_2^k\,d\eta_2}{\sqrt{R_1(\eta_2)}} - \dots - \frac{\eta_\sigma^k\,d\eta_\sigma}{\sqrt{R_1(\eta_\sigma)}} \\
&=\frac{Y_1^k\,dY_1}{\sqrt{R_1(Y_1)}} + \frac{Y_2^k\,dY_2}{\sqrt{R_1(Y_2)}} + \dots + \frac{Y_\sigma^k\,dY_\sigma}{\sqrt{R_1(Y_\sigma)}},
\end{aligned} \tag{28}$$

wenn die zu den Grössen (γ) gehörigen Irrationalitäten durch die Gleichungen bestimmt sind

$$\sqrt{R_1(Y_1)} = \frac{p(Y_1)}{q(Y_1)}, \dots \sqrt{R_1(Y_\sigma)} = \frac{p(Y_\sigma)}{q(Y_\sigma)}. \tag{29}$$

Gehen wir nunmehr auf die Form der Coefficienten der Gleichung (26) näher ein; das dieselben bestimmende Gleichungssystem

$$\begin{aligned}
&a_m y_1^m + a_{m-1} y_1^{m-1} + \dots + a_0 - b_{m-\sigma-1} y_1^{m-\sigma-1} \sqrt{R_1(y_1)} - \dots - b_0 \sqrt{R_1(y_1)} = 0, \\
&a_m y_2^m + a_{m-1} y_2^{m-1} + \dots + a_0 - b_{m-\sigma-1} y_2^{m-\sigma-1} \sqrt{R_1(y_2)} - \dots - b_0 \sqrt{R_1(y_2)} = 0, \\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
&a_m y_\sigma^m + a_{m-1} y_\sigma^{m-1} + \dots + a_0 - b_{m-\sigma-1} y_\sigma^{m-\sigma-1} \sqrt{R_1(y_\sigma)} - \dots - b_0 \sqrt{R_1(y_\sigma)} = 0, \\
&a_m \eta_1^m + a_{m-1} \eta_1^{m-1} + \dots + a_0 + b_{m-\sigma-1} \eta_1^{m-\sigma-1} \sqrt{R_1(\eta_1)} - \dots - b_0 \sqrt{R_1(\eta_1)} = 0, \\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
&a_m \eta_\sigma^m + a_{m-1} \eta_\sigma^{m-1} + \dots + a_0 + b_{m-\sigma-1} \eta_\sigma^{m-\sigma-1} \sqrt{R_1(\eta_\sigma)} + \dots + b_0 \sqrt{R_1(\eta_\sigma)} = 0,
\end{aligned}$$

kann, wenn wir berücksichtigen, dass

$$\sqrt{R_1(y_r)} \text{ und } \sqrt{R_1(\eta_r)},$$

nach den Gleichungen (21) und (23) als rationale Functionen von y_r resp. η_r und z_1, $\sqrt{R(z_1)}$ darstellbar sind, in die Form gebracht werden:

$$
(30) \quad
\begin{aligned}
&a_m\{F_0(z_1,\sqrt{R(z_1)})y_1^{\varkappa}+F_1(z_1,\sqrt{R(z_1)})y_1^{\varkappa-1}+\cdots\}+\cdots\\
&-b_{m-\sigma-1}\{\varPhi_0(z_1,\sqrt{R(z_1)})y_1^{\lambda}+\varPhi_1(z_1,\sqrt{R(z_1)})y_1^{\lambda-1}+\cdots\}-\cdots=0,\\
&\quad\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&a_m\{F_0(z_1,\sqrt{R(z_1)})y_\sigma^{\varkappa}+F_1(z_1,\sqrt{R(z_1)})y_\sigma^{\varkappa-1}+\cdots\}+\cdots\\
&-b_{m-\sigma-1}\{\varPhi_0(z_1,\sqrt{R(z_1)})y_\sigma^{\lambda}+\varPhi_1(z_1,\sqrt{R(z_1)})y_\sigma^{\lambda-1}+\cdots\}-\cdots=0,\\
&a_m\{F_0(z_1,-\sqrt{R(z_1)})\eta_1^{\varkappa}+F_1(z_1,-\sqrt{R(z_1)})\eta_1^{\varkappa-1}+\cdots\}+\cdots\\
&+b_{m-\sigma-1}\{\varPhi_0(z_1,-\sqrt{R(z_1)})\eta_1^{\lambda}+\varPhi_1(z_1,-\sqrt{R(z_1)})\eta_1^{\lambda-1}+\cdots\}+\cdots=0,\\
&\quad\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&a_m\{F_0(z_1,-\sqrt{R(z_1)})\eta_\sigma^{\varkappa}+F_1(z_1,-\sqrt{R(z_1)})\eta_\sigma^{\varkappa-1}+\cdots\}+\cdots\\
&+b_{m-\sigma-1}\{\varPhi_0(z_1,-\sqrt{R(z_1)})\eta_\sigma^{\lambda}+\varPhi_1(z_1,-\sqrt{R(z_1)})\eta_\sigma^{\lambda-1}+\cdots\}+\cdots=0,
\end{aligned}
$$

worin die Functionen

$$F_0, F_1, \ldots, \varPhi_0, \varPhi_1, \ldots$$

ganze rationale Functionen der in ihnen enthaltenen Grössen bedeuten.

Addirt man jetzt die ersten σ Gleichungen des Systems (30), nachdem dieselben mit

$$
\begin{array}{cccc}
1, & 1, & \ldots & 1\\
y_1, & y_2, & \ldots & y_\sigma\\
y_1^2, & y_2^2, & \ldots & y_\sigma^2\\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\
y_1^{\sigma-1}, & y_2^{\sigma-1}, & \ldots & y_\sigma^{\sigma-1}
\end{array}
$$

multiplicirt sind, verfährt ebenso mit den zweiten σ Gleichungen dieses Systems, und setzt:

$$y_1^r+y_2^r+\cdots+y_\sigma^r=s_r,\quad \eta_1^r+\eta_2^r+\cdots+\eta_\sigma^r=S_r,$$

so folgt:

$$
(31)\quad
\begin{aligned}
&a_m\{F_0(z_1, \sqrt{R(z_1)})s_\varkappa + F_1(z_1, \sqrt{R(z_1)})s_{\varkappa-1} + \cdots\} + \cdots\\
&-b_{m-\sigma-1}\{\Phi_0(z_1, \sqrt{R(z_1)})s_\lambda + \Phi_1(z_1, \sqrt{R(z_1)})s_{\lambda-1} + \cdots\} - \cdots = 0,\\
&a_m\{F_0(z_1, \sqrt{R(z_1)})s_{\varkappa+1} + F_1(z_1, \sqrt{R(z_1)})s_\varkappa + \cdots\} + \cdots\\
&-b_{m-\sigma-1}\{\Phi_0(z_1, \sqrt{R(z_1)})s_{\lambda+1} + \Phi_1(z_1, \sqrt{R(z_1)})s_\lambda + \cdots\} - \cdots = 0,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&a_m\{F_0(z_1, \sqrt{R(z_1)})s_{\varkappa+\sigma-1} + F_1(z_1, \sqrt{R(z_1)})s_{\varkappa+\sigma-2} + \cdots\} + \cdots\\
&-b_{m-\sigma-1}\{\Phi_0(z_1, \sqrt{R(z_1)})s_{\lambda+\sigma-1} + \Phi_1(z_1, \sqrt{R(z_1)})s_{\lambda+\sigma-2} + \cdots\} - \cdots = 0,\\
&a_m\{F_0(z_1, -\sqrt{R(z_1)})S_\varkappa + F_1(z_1, -\sqrt{R(z_1)})S_{\varkappa-1} + \cdots\} + \cdots\\
&+b_{m-\sigma-1}\{\Phi_0(z_1, -\sqrt{R(z_1)})S_\lambda + \Phi_1(z_1, -\sqrt{R(z_1)})S_{\lambda-1} + \cdots\} + \cdots = 0,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&a_m\{F_0(z_1, -\sqrt{R(z_1)})S_{\varkappa+\sigma-1} + F_1(z_1, -\sqrt{R(z_1)})S_{\varkappa+\sigma-2} + \cdots\} + \cdots\\
&+b_{m-\sigma-1}\{\Phi_0(z_1, -\sqrt{R(z_1)})S_{\lambda+\sigma-1} + \Phi_1(z_1, -\sqrt{R(z_1)})S_{\lambda+\sigma-2} + \cdots\} + \cdots = 0.
\end{aligned}
$$

Da aber die Potenzsummen s und S der Lösungen der Gleichungen (20) und (22) sich rational durch deren Coefficienten ausdrücken lassen, und die beiden Gleichungen sich in den Coefficienten der zu berechnenden a- und b-Grössen nur durch das verschiedene Zeichen von $\sqrt{R(z_1)}$ unterscheiden, so werden wir das System (31) auch in die Form bringen können:

$$
(32)\quad
\begin{aligned}
&a_m\left(A_{1m} + B_{1m}\sqrt{R(z_1)}\right) + \cdots - b_{m-\sigma-1}\left(P_{1m} + Q_{1m}\sqrt{R(z_1)}\right) - \cdots = 0,\\
&a_m\left(A_{2m} + B_{2m}\sqrt{R(z_1)}\right) + \cdots - b_{m-\sigma-1}\left(P_{2m} + Q_{2m}\sqrt{R(z_1)}\right) - \cdots = 0,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&a_m\left(A_{\sigma m} + B_{\sigma m}\sqrt{R(z_1)}\right) + \cdots - b_{m-\sigma-1}\left(P_{\sigma m} + Q_{\sigma m}\sqrt{R(z_1)}\right) - \cdots = 0,\\
&a_m\left(A_{1m} - B_{1m}\sqrt{R(z_1)}\right) + \cdots + b_{m-\sigma-1}\left(P_{1m} - Q_{1m}\sqrt{R(z_1)}\right) + \cdots = 0,\\
&a_m\left(A_{2m} - B_{2m}\sqrt{R(z_1)}\right) + \cdots + b_{m-\sigma-1}\left(P_{2m} - Q_{2m}\sqrt{R(z_1)}\right) + \cdots = 0,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&a_m\left(A_{\sigma m} - B_{\sigma m}\sqrt{R(z_1)}\right) + \cdots + b_{m-\sigma-1}\left(P_{\sigma m} - Q_{\sigma m}\sqrt{R(z_1)}\right) + \cdots = 0.
\end{aligned}
$$

Wenn man nun die entsprechenden Gleichungen, welche sich nur durch das Zeichen von $\sqrt{R(z_1)}$ unterscheiden, durch Addition und Subtraction mit einander verbindet, so erhält man z. B. aus der 1ten und $\sigma+1$ten Gleichung des Systems (32) die Gleichungen

$$\begin{aligned} 2a_m A_{1m} + \cdots\cdots\cdots - 2b_{m-\sigma-1} Q_{1m} \sqrt{R(z_1)} - \cdots &= 0, \\ 2a_m B_{1m} \sqrt{R(z_1)} + \cdots - 2b_{m-\sigma-1} P_{1m} - \cdots\cdots\cdots &= 0, \end{aligned}$$

oder, wenn die zweite dieser Gleichungen durch $\sqrt{R(z_1)}$ dividirt und

$$\frac{P_{1m}}{R(z_1)} = P'_{1m}, \ldots$$

gesetzt wird,

$$\begin{aligned} 2a_m A_{1m} + \cdots - 2b_{m-\sigma-1} Q_{1m} \sqrt{R(z_1)} - \cdots &= 0, \\ 2a_m B_{1m} + \cdots - 2b_{m-\sigma-1} P'_{1m} \sqrt{R(z_1)} - \cdots &= 0, \end{aligned}$$

und es folgt somit aus (32) zur Bestimmung der a- und b-Constanten das nachstehende Gleichungssystem:

$$(33) \qquad \begin{aligned} 2a_m A_{1m} + \cdots - 2b_{m-\sigma-1} Q_{1m} \sqrt{R(z_1)} - \cdots &= 0 \\ 2a_m A_{2m} + \cdots - 2b_{m-\sigma-1} Q_{2m} \sqrt{R(z_1)} - \cdots &= 0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots & \\ 2a_m A_{\sigma m} + \cdots - 2b_{m-\sigma-1} Q_{\sigma m} \sqrt{R(z_1)} - \cdots &= 0 \\ 2a_m B_{1m} + \cdots - 2b_{m-\sigma-1} P'_{1m} \sqrt{R(z_1)} - \cdots &= 0 \\ 2a_m B_{2m} + \cdots - 2b_{m-\sigma-1} P'_{2m} \sqrt{R(z_1)} - \cdots &= 0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots & \\ 2a_m B_{\sigma m} + \cdots - 2b_{m-\sigma-1} P'_{\sigma m} \sqrt{R(z_1)} - \cdots &= 0. \end{aligned}$$

Beachtet man nun, dass nur für die b-Grössen die Determinante des Zählers der Auflösung den Factor $\sqrt{R(z_1)}$ einmal weniger hat als die Determinante des Nenners, so ergiebt sich, wenn — was gestattet ist — eine der a-Grössen z. B. $a_m = 1$ gesetzt wird,

> *dass die a-Grössen sämmtlich rationale Functionen von z_1 sind, während die b-Grössen durch das Product von in z_1 rationalen Functionen in die Irrationalität $\sqrt{R(z_1)}$ dargestellt werden, oder dass die Coefficienten der Function $p(y)$ rational in z_1, die von $q(y)$ ebenso, jedoch mit dem Factor $\sqrt{R(z_1)}$ behaftet, ausgedrückt sind.*

Da nun aber die Gleichung (27) die Form hat

$$(34) \qquad p(y)^2 - q(y)^2 R_1(y) = (y-y_1)(y-y_2)\cdots(y-y_\sigma)(y-\eta_1)(y-\eta_2)\cdots(y-\eta_\sigma) \\ \times (y-Y_1)(y-Y_2)\cdots(y-Y_\sigma),$$

ferner

$$(y-y_1)(y-y_2)\cdots(y-y_\sigma)(y-\eta_1)(y-\eta_2)\cdots(y-\eta_\sigma)$$

als Product der linken Seiten der Gleichungen (20) und (22), wie unmittelbar daraus zu erkennen, dass

$$\begin{gathered}f_\varrho\big(z_1, \sqrt{R(z_1)}\big) + f_1\big(z_1, -\sqrt{R(z_1)}\big) f_{\varrho-1}\big(z_1, \sqrt{R(z_1)}\big) + \cdots \\ + f_{\varrho-1}\big(z_1, -\sqrt{R(z_1)}\big) f_1\big(z_1, \sqrt{R(z_1)}\big) + f_\varrho\big(z_1, -\sqrt{R(z_1)}\big)\end{gathered}$$

eine rationale Function von z_1 ist, in der Form darstellbar ist

$$y^{2\sigma} + \psi_1(z_1) y^{2\sigma-1} + \cdots + \psi_{2\sigma-1}(z_1) y + \psi_{2\sigma}(z_1) = 0,$$

worin

$$\psi_1(z_1), \ldots \psi_{2\sigma-1}(z_1), \psi_{2\sigma}(z_1)$$

rationale Functionen von z_1 sind, so werden nach (34)

die Coefficienten des Polynoms

$$(y-Y_1)(y-Y_2)\cdots(y-Y_\sigma) = y^\sigma + \chi_1(z_1) y^{\sigma-1} + \cdots + \chi_\sigma(z_1)$$

rationale Functionen von z_1 sein, während die zu den Grössen $Y_1, Y_2 \ldots Y_\sigma$ gehörigen Irrationalitäten nach den Gleichungen (29), wie aus der oben gefundenen Eigenschaft der Coefficienten der Polynome $p(y)$ und $q(y)$ hervorgeht, rationale Functionen der zugehörigen Grössen Y und der Grösse z_1 multiplicirt mit der Irrationalität $\sqrt{R(z_1)}$ nein werden.

Es bedarf kaum einer weiteren Erläuterung, dass sich dasselbe Resultat auch für den Fall des ungraden σ ergiebt; denn setzt man

$$3\sigma = 2m - 1,$$

und bildet, wenn α eine Lösung der Gleichung $R_1(y) = 0$ bezeichnet, den Ausdruck

$$(\delta) \qquad (y-\alpha)P(y) - Q(y)\sqrt{R(y)},$$

in welchem $P(y)$ ein Polynom

$$m - 1 = \frac{3\sigma - 1^{\text{ten}}}{2}$$

Grades, $Q(y)$ vom

$$m - \sigma - 1 = \frac{\sigma - 1^{\text{ten}}}{2}$$

Grade ist, so wird man wieder die

$$\frac{3\sigma - 1}{2} + \frac{\sigma - 1}{2} + 1 = 2\sigma$$

Constantenquotienten so bestimmen können, dass der Ausdruck (δ) für die Werthecombinationen

$$y_1, \sqrt{R_1(y_1)}, \dots y_\sigma, \sqrt{R_1(y_\sigma)}, \eta_1, -\sqrt{R_1(\eta_1)}, \dots \eta_\sigma, -\sqrt{R_1(\eta_\sigma)},$$

verschwindet, und es werden nunmehr alle weiteren Schlüsse dieselben bleiben, so dass sich wieder vermöge der Beziehung

$$\begin{gathered}(y-\alpha)^2 P(y)^2 - Q(y)^2 R_1(y) \\ = (y-\alpha)(y-y_1)\cdots(y-y_\sigma)(y-\eta_1)\cdots(y-\eta_\sigma)(y-Y_1)\cdots(y-Y_\sigma)\end{gathered}$$

die Grössen

$$Y_1, Y_2, \dots Y_\sigma$$

als Lösungen einer Gleichung ergeben, deren Coefficienten rational aus z_1 zusammengesetzt sind.

Hieraus folgt, dass

das oben aufgestellte System hyperelliptischer Differentialgleichungen (16) *sich in allen Fällen durch das folgende:*

$$(35)\qquad \begin{aligned}
&\frac{dY_1}{\sqrt{R_1(Y_1)}} + \frac{dY_2}{\sqrt{R_1(Y_2)}} + \cdots + \frac{dY_\sigma}{\sqrt{R_1(Y_\sigma)}} = 2\frac{F_0(z_1)\,dz_1}{\sqrt{R(z_1)}} \\
&\frac{Y_1\,dY_1}{\sqrt{R_1(Y_1)}} + \frac{Y_2\,dY_2}{\sqrt{R_1(Y_2)}} + \cdots + \frac{Y_\sigma\,dY_\sigma}{\sqrt{R_1(Y_\sigma)}} = 2\frac{F_1(z_1)\,dz_1}{\sqrt{R(z_1)}} \\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
&\frac{Y_1^{\sigma-1}dY_1}{\sqrt{R_1(Y_1)}} + \frac{Y_2^{\sigma-1}dY_2}{\sqrt{R_1(Y_2)}} + \cdots + \frac{Y_\sigma^{\sigma-1}dY_\sigma}{\sqrt{R_1(Y_\sigma)}} = 2\frac{F_{\sigma-1}(z_1)\,dz_1}{\sqrt{R(z_1)}}
\end{aligned}$$

ersetzen lässt, in welchem

$$Y_1, Y_2, \dots Y_\sigma$$

die Lösungen einer algebraischen Gleichung

$$(36)\qquad y^\sigma + \chi_1(z_1)y^{\sigma-1} + \cdots + \chi_\sigma(z_1) = 0$$

darstellen, deren Coefficienten rationale Functionen von z_1, *sind, und,*

$$\sqrt{R_1(Y_1)}, \sqrt{R_1(Y_2)}, \dots \sqrt{R_1(Y_\sigma)}$$

sich als rationale Functionen der zugehörigen Y*-Grössen und* z_1 *ausdrücken lassen, multiplicirt mit* $\sqrt{R(z_1)}$.

Um nun aus der eben gegebenen Vereinfachung des oben ausgesprochenen Satzes von der Reduction der hyperelliptischen Integrale die entsprechende Vereinfachung für den vorher angeführten Satz, die allgemeine Transformation der hyperelliptischen Integrale betreffend, herzuleiten, gehen wir, wie oben, indem wir nur $\sigma = p$ setzen und somit von dem Transformationsproblem eines hyperelliptischen Systems in ein solches derselben Ordnung reden, von dem Gleichungssysteme aus

$$\begin{aligned}
\frac{dz_1}{\sqrt{R(z_1)}} &= \frac{f_0(y_1)\,dy_1}{\sqrt{R_1(y_1)}} + \frac{f_0(y_2)\,dy_2}{\sqrt{R_1(y_2)}} + \cdots + \frac{f_0(y_p)\,dy_p}{\sqrt{R_1(y_p)}} \\
\frac{z_1\,dz_1}{\sqrt{R(z_1)}} &= \frac{f_1(y_1)\,dy_1}{\sqrt{R_1(y_1)}} + \frac{f_1(y_2)\,dy_2}{\sqrt{R_1(y_2)}} + \cdots + \frac{f_1(y_p)\,dy_p}{\sqrt{R_1(y_p)}} \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
\frac{z_1^{p-1}dz_1}{\sqrt{R(z_1)}} &= \frac{f_{p-1}(y_1)\,dy_1}{\sqrt{R_1(y_1)}} + \frac{f_{p-1}(y_2)\,dy_2}{\sqrt{R_1(y_2)}} + \cdots + \frac{f_{p-1}(y_p)\,dy_p}{\sqrt{R_1(y_p)}},
\end{aligned}$$

in welchem wir nach dem eben hergeleiteten Satze annehmen dürfen, dass

$$y_1, y_2, \dots y_p$$

Lösungen einer Gleichung p^{ten} Grades bedeuten, deren Coefficienten rationale Functionen von z_1 sind, während die zu den y-Grössen gehörigen Irrationalitäten durch das Product einer in dem resp. y und z_1 rationalen Function in $\sqrt{R(z_1)}$ dargestellt werden. Führen wir weiter wie oben $p-1$ neue Variable ein

$$z_2, z_3, \dots z_p,$$

denen die Werthereihen

$$\begin{array}{lll}
y_1^{(1)} & y_2^{(1)} & \dots y_p^{(1)} \\
y_1^{(2)} & y_2^{(2)} & \dots y_p^{(2)} \\
\dots & \dots & \dots \\
y_1^{(p-1)} & y_2^{(p-1)} & \dots y_p^{(p-1)}
\end{array}$$

entsprechen sollen, welche wieder Lösungen ähnlicher Gleichungen sind, und für welche die Irrationalitäten ebenfalls die oben hervorgehobene Eigenschaft haben, so werden nunmehr die durch die Gleichung

$$
\begin{aligned}
& \frac{f_r(y_1)\,dy_1}{\sqrt{R_1(y_1)}} + \frac{f_r(y_2)\,dy_2}{\sqrt{R_1(y_2)}} + \cdots + \frac{f_r(y_p)\,dy_p}{\sqrt{R_1(y_p)}} \\
+ & \frac{f_r(y_1^{(1)})\,dy_1^{(1)}}{\sqrt{R_1(y_1^{(1)})}} + \frac{f_r(y_2^{(1)})\,dy_2^{(1)}}{\sqrt{R_1(y_2^{(1)})}} + \cdots + \frac{f_r(y_p^{(1)})\,dy_p^{(1)}}{\sqrt{R_1(y_p^{(1)})}} \\
& \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
+ & \frac{f_r(y_1^{(p-1)})\,dy_1^{(p-1)}}{\sqrt{R_1(y_1^{(p-1)})}} + \frac{f_r(y_2^{(p-1)})\,dy_2^{(p-1)}}{\sqrt{R_1(y_2^{(p-1)})}} + \cdots + \frac{f_r(y_p^{(p-1)})\,dy_p^{(p-1)}}{\sqrt{R_1(y_p^{(p-1)})}} \\
= & \frac{f_r(Y_1)\,dY_1}{\sqrt{R_1(Y_1)}} + \frac{f_r(Y_2)\,dY_2}{\sqrt{R_1(Y_2)}} + \cdots + \frac{f_r(Y_p)\,dY_p}{\sqrt{R_1(Y_p)}}
\end{aligned}
$$

nach dem Abel'schen Theorem definirten Grössen

$$Y_1, Y_2, \dots Y_p$$

als Lösungen einer Gleichung p^{ten} Grades sich ergeben, für welche die Eigenschaften ihrer Coefficienten näher zu untersuchen sind.

Nach dem Additionstheorem sind die Coefficienten der Function

$$p(y) - q(y)\sqrt{R_1(y)},$$

in welcher

$$p(y) \text{ vom } \frac{p^2 + p^{\text{ten}}}{2}, \quad q(y) \text{ vom } \frac{p^2 - p}{2} - 1^{\text{ten}}$$

Grade sind, derart zu bestimmen, dass dieselbe für jene p Systeme von y-Werthen und die dazugehörigen Irrationalitäten verschwindet, und es werden somit, wenn man

$$\frac{p^2 + p}{2} = \varrho$$

setzt, die Gleichungen zu befriedigen sein

$$
\begin{aligned}
a_\varrho y_1^\varrho + a_{\varrho-1} y_1^{\varrho-1} + \cdots + a_0 - b_{\varrho-p-1} y_1^{\varrho-p-1}\sqrt{R_1(y_1)} - \cdots \\
- b_0\sqrt{R_1(y_1)} = 0
\end{aligned}
$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$a_\varrho y_p^\varrho + a_{\varrho-1} y_p^{\varrho-1} + \cdots + a_0 - b_{\varrho-p-1} y_p^{\varrho-p-1} \sqrt{R_1(y_p)} - \cdots$$
$$- b_0 \sqrt{R_1(y_p)} = 0$$

$$a_\varrho y_1^{(1)^\varrho} + a_{\varrho-1} y_1^{(1)^{\varrho-1}} + \cdots + a_0 - b_{\varrho-p-1} y_1^{(1)^{\varrho-p-1}} \sqrt{R_1(y_1^{(1)})} - \cdots$$
$$- b_0 \sqrt{R_1(y_1^{(1)})} = 0$$

. . . .

$$a_\varrho y_p^{(1)^\varrho} + a_{\varrho-1} y_p^{(1)^{\varrho-1}} + \cdots + a_0 - b_{\varrho-p-1} y_p^{(1)^{\varrho-p-1}} \sqrt{R_1(y_p^{(1)})} - \cdots$$
$$- b_0 \sqrt{R_1(y_p^{(1)})} = 0$$

. . . .

$$a_\varrho y_1^{(p-1)^\varrho} + a_{\varrho-1} y_1^{(p-1)^{\varrho-1}} + \cdots + a_0 - b_{\varrho-p-1} y_1^{(p-1)^{\varrho-p-1}} \sqrt{R_1(y_1^{(p-1)})} - \cdots$$
$$- b_0 \sqrt{R_1(y_1^{(p-1)})} = 0$$

. . . .

$$a_\varrho y_p^{(p-1)^\varrho} + a_{\varrho-1} y_p^{(p-1)^{\varrho-1}} + \cdots + a_0 - b_{\varrho-p-1} y_p^{(p-1)^{\varrho-p-1}} \sqrt{R_1(y_p^{(p-1)})} - \cdots$$
$$- b_0 \sqrt{R_1(y_p^{(p-1)})} = 0,$$

welche, da die Irrationalitäten als ein Product von rationalen Functionen der zugehörigen y- und z-Grössen in die Irrationalität $\sqrt{R(z)}$ darstellbar sind, auch in die Form gebracht werden können:

$$a_\varrho \left[f_0(z_1) y_1^k + f_1(z_1) y_1^{k-1} + \cdots \right] + \cdots + b_{\varrho-p-1} \left[F_0(z_1) y_1^l + F_1(z_1) y_1^{l-1} + \cdots \right] \sqrt{R(z_1)} + \cdots = 0$$
$$a_\varrho \left[f_0(z_1) y_2^k + f_1(z_1) y_2^{k-1} + \cdots \right] + \cdots + b_{\varrho-p-1} \left[F_0(z_1) y_2^l + F_1(z_1) y_2^{l-1} + \cdots \right] \sqrt{R(z_1)} + \cdots = 0$$

. . . .

$$a_\varrho \left[f_0(z_p) y_1^{(p-1)^k} + f_1(z_p) y_1^{(p-1)^{k-1}} + \cdots \right] + \cdots$$
$$+ b_{\varrho-p-1} \left[F_0(z_p) y_1^{(p-1)^l} + F_1(z_p) y_1^{(p-1)^{l-1}} + \cdots \right] \sqrt{R(z_p)} + \cdots = 0$$
$$a_\varrho \left[f_0(z_p) y_2^{(p-1)^k} + f_1(z_p) y_2^{(p-1)^{k-1}} + \cdots \right] + \cdots$$
$$+ b_{\varrho-p-1} \left[F_0(z_p) y_2^{(p-1)^l} + F_1(z_p) y_2^{(p-1)^{l-1}} + \cdots \right] \sqrt{R(z_p)} + \cdots = 0$$

. . . . ,

worin

$$f_0(z), f_1(z), \ldots F_0(z), F_1(z), \ldots$$

rationale Functionen von z bedeuten.

Fasst man wiederum ähnlich wie früher je p Gleichungen zusammen, die zu demselben y-System gehören, indem man dieselben, nachdem sie mit

$$\begin{array}{llll} 1 & 1 & \ldots\ldots\ldots & 1 \\ y_1^{(\alpha)} & y_2^{(\alpha)} & \ldots\ldots\ldots & y_p^{(\alpha)} \\ y_1^{(\alpha)^2} & y_2^{(\alpha)^2} & \ldots\ldots\ldots & y_p^{(\alpha)^2} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ y_1^{(\alpha)^{p-1}} & y_2^{(\alpha)^{p-1}} & \ldots\ldots & y_p^{(\alpha)^{p-1}} \end{array}$$

multiplicirt sind, zu einander addirt, so ergiebt sich, wenn

$$y_1^{(\alpha)^\sigma} + y_2^{(\alpha)^\sigma} + \cdots + y_p^{(\alpha)^\sigma} = s_\sigma^{(\alpha)}$$

gesetzt wird, das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} &a_\varrho\big[f_0(z_1)s_k + f_1(z_1)s_{k-1} + \cdots\big] + \cdots \\ &+b_{\varrho-p-1}\big[F_0(z_1)s_l + F_1(z_1)s_{l-1} + \cdots\big]\sqrt{R(z_1)} + \cdots = 0, \\ &a_\varrho\big[f_0(z_1)s_{k+1} + f_1(z_1)s_k + \cdots\big] + \cdots \\ &+b_{\varrho-p-1}\big[F_0(z_1)s_{l+1} + F_1(z_1)s_l + \cdots\big]\sqrt{R(z_1)} + \cdots = 0, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &a_\varrho\big[f_0(z_p)s_k^{(p-1)} + f_1(z_p)s_{k-1}^{(p-1)} + \cdots\big] + \cdots \\ &+b_{\varrho-p-1}\big[F_0(z_p)s_l^{(p-1)} + F_1(z_p)s_{l-1}^{(p-1)} + \cdots\big]\sqrt{R(z_p)} + \cdots = 0, \\ &a_\varrho\big[f_0(z_p)s_{k+1}^{(p-1)} + f_1(z_p)s_k^{(p-1)} + \cdots\big] + \cdots \\ &+b_{\varrho-p-1}\big[F_0(z_p)s_{l+1}^{(p-1)} + F_1(z_p)s_l^{(p-1)} + \cdots\big]\sqrt{R(z_p)} + \cdots = 0, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \end{aligned}$$

oder auch, da die Potenzsummen s rational durch die die resp. z-Grösse rational enthaltenden Coefficienten der einzelnen Gleichungen ausdrückbar sind, das nachfolgende

System von Bestimmungsgleichungen für die Grössen $a_0, a_1, \dots a_\varrho, b_0, b_1, \dots b_{\varrho-p-1}$:

$$\begin{aligned}
&a_\varrho\varphi_{0\,1}(z_1) + \cdots + a_0\varphi_{\varrho\,1}(z_1) + b_{\varrho-p-1}\psi_{0\,1}(z_1)\sqrt{R(z_1)} + \cdots \\
&\qquad\qquad + b_0\psi_{\varrho-p-1\,1}(z_1)\sqrt{R(z_1)} = 0, \\
&a_\varrho\varphi_{0\,2}(z_1) + \cdots + a_0\varphi_{\varrho\,2}(z_1) + b_{\varrho-p-1}\psi_{0\,2}(z_1)\sqrt{R(z_1)} + \cdots \\
&\qquad\qquad + b_0\psi_{\varrho-p-1\,2}(z_1)\sqrt{R(z_1)} = 0, \\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
&a_\varrho\varphi_{0\,p}(z_1) + \cdots + a_0\varphi_{\varrho\,p}(z_1) + b_{\varrho-p-1}\psi_{0\,p}(z_1)\sqrt{R(z_1)} + \cdots \\
&\qquad\qquad + b_0\psi_{\varrho-p-1\,p}(z_1)\sqrt{R(z_1)} = 0, \\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
&a_\varrho\varphi_{0\,1}(z_p) + \cdots + a_0\varphi_{\varrho\,1}(z_p) + b_{\varrho-p-1}\psi_{0\,1}(z_p)\sqrt{R(z_p)} + \cdots \\
&\qquad\qquad + b_0\psi_{\varrho-p-1\,1}(z_p)\sqrt{R(z_p)} = 0, \\
&a_\varrho\varphi_{0\,2}(z_p) + \cdots + a_0\varphi_{\varrho\,2}(z_p) + b_{\varrho-p-1}\psi_{0\,2}(z_p)\sqrt{R(z_p)} + \cdots \\
&\qquad\qquad + b_0\psi_{\varrho-p-1\,2}(z_p)\sqrt{R(z_p)} = 0, \\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
&a_\varrho\varphi_{0\,p}(z_p) + \cdots + a_0\varphi_{\varrho\,p}(z_p) + b_{\varrho-p-1}\psi_{0\,p}(z_p)\sqrt{R(z_p)} + \cdots \\
&\qquad\qquad + b_0\psi_{\varrho-p-1\,p}(z_p)\sqrt{R(z_p)} = 0.
\end{aligned}$$

Das Charakteristische dieser Gleichungen ist dies, dass die Coefficienten der Grössen a sämmtlich rationale Functionen der einzelnen Variablen $z_1, z_2, \dots z_p$ sind, während die Coefficienten der b-Grössen aus den Producten eben solcher Grössen in die zugehörige Irrationalität $\sqrt{R(z)}$ bestehen; man schliesst hieraus z. B. unmittelbar, dass für hyperelliptische Integrale erster Ordnung die Coefficienten der Gleichung, deren Lösungen die Grössen $Y_1, Y_2, \dots Y_p$ sind, die Form haben

$$m + n\sqrt{R(z_1)} \cdot \sqrt{R(z_2)},$$

worin m und n rationale symmetrische Functionen von z_1 und z_2 sind.

Gehen wir nun wieder zu dem ursprünglichen allgemeinen Transformationsproblem zurück, um zu sehen, ob die Gleichung (10) erfüllt werden kann, und welche Form sie haben muss, so hat man nur in dieser Gleichung aus den der Gleichung (11) analogen Gleichungen für die Grössen ζ die für eben diese Grössen hervorgehenden Werthe zu substituiren. Seien z. B.

$$\overset{(1)}{\zeta}{}^{(g+1)}_{2p-2h+1}, \quad \overset{(2)}{\zeta}{}^{(g+1)}_{2p-2h+1}, \ldots \overset{(p-h)}{\zeta}{}^{(g+1)}_{2p-2h+1}$$

die Lösungen der Gleichung

$$(37) \qquad \zeta^{p-h} + \varphi_1\Big(z^{(1)}_{2p+1}, \sqrt{R^{(1)}_{2p+1}(z^{(1)}_{2p+1})}\Big)\zeta^{p-h-1} + \cdots + \varphi_{p-h}\Big(z^{(1)}_{2p+1}, \sqrt{R^{(1)}_{2p+1}(z^{(1)}_{2p+1})}\Big) = 0,$$

in der die φ-Functionen rationale Functionen der in ihnen enthaltenen Grössen bedeuten, so wird durch Differentiation

$$\begin{aligned}
d\overset{(1)}{\zeta}{}^{(g+1)}_{2p-2h+1} &= F\Big(\overset{(1)}{\zeta}{}^{(g+1)}_{2p-2h+1}, z^{(1)}_{2p+1}, \sqrt{R^{(1)}_{2p+1}(z^{(1)}_{2p+1})}\Big)dz^{(1)}_{2p+1},\\
d\overset{(2)}{\zeta}{}^{(g+1)}_{2p-2h+1} &= F\Big(\overset{(2)}{\zeta}{}^{(g+1)}_{2p-2h+1}, z^{(1)}_{2p+1}, \sqrt{R^{(1)}_{2p+1}(z^{(1)}_{2p+1})}\Big)dz^{(1)}_{2p+1},\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
d\overset{(p-h)}{\zeta}{}^{(g+1)}_{2p-2h+1} &= F\Big(\overset{(p-h)}{\zeta}{}^{(g+1)}_{2p-2h+1}, z^{(1)}_{2p+1}, \sqrt{R^{(1)}_{2p+1}(z^{(1)}_{2p+1})}\Big)dz^{(1)}_{2p+1},
\end{aligned}$$

wenn F eine rationale Function der in ihr enthaltenen Grössen bezeichnet, und wenn diese Gleichungen der Reihe nach mit

$$\begin{gathered}
F^{(g+1)}_{2p-2h+1}\left(\overset{(1)}{\zeta}{}^{(g+1)}_{2p-2h+1}, \sqrt{R^{(g+1)}_{2p-2h+1}(\overset{(1)}{\zeta}{}^{(g+1)}_{2p-2h+1})}\right), \ldots\\
F^{(g+1)}_{2p-2h+1}\left(\overset{(p-h)}{\zeta}{}^{(g+1)}_{2p-2h+1}, \sqrt{R^{(g+1)}_{2p-2h+1}(\overset{(p-h)}{\zeta}{}^{(g+1)}_{2p-2h+1})}\right)
\end{gathered}$$

multiplicirt und dann addirt werden, ausserdem aber beachtet wird, dass die Irrationalitäten dieser Multiplicatoren der Voraussetzung gemäss durch die entsprechenden ζ-Grössen mit Hülfe von

$$(\mathrm{m}) \qquad z^{(1)}_{2p+1} \text{ und } \sqrt{R^{(1)}_{2p+1}(z^{(1)}_{2p+1})}$$

rational ausdrückbar sind, und somit das Resultat der Addition der rechten Seiten als rationale symmetrische Function der ζ-Grössen sich rational durch die Grössen (m) wird ausdrücken lassen, so ergiebt sich, dass

$$\sum_{\alpha=1}^{p-h} F^{(g+1)}_{2p-2h+1}\left(\overset{(\alpha)}{\zeta}{}^{(g+1)}_{2p-2h+1}, \sqrt{R^{(g+1)}_{2p-2h+1}(\overset{(\alpha)}{\zeta}{}^{(g+1)}_{2p-2h+1})}\right) d\overset{(\alpha)}{\zeta}{}^{(g+1)}_{2p-2h+1}$$

eine rationale Function der Grössen (m) multiplicirt mit $dz^{(1)}_{2p+1}$ sein wird, und dasselbe gilt von all' den einzelnen Summen der rechten Seite der Gleichung (10). Bringt man nunmehr alle Integrale der Gleichung (10) auf die linke Seite und giebt ihnen allen dieselbe untere Gränze $\zeta_{2p+1}^{(1)}$ was nur eine Aenderung der Constanten der rechten Seite bedingt, so wird die linke Seite aus einem zwischen den Gränzen $\zeta_{2p+1}^{(1)}$ und $z_{2p+1}^{(1)}$ genommenen hyperelliptischen Integrale mit der Irrationalität

$$\sqrt{R_{2p+1}^{(1)}(z^{(1)})}$$

bestehen, und es wird sich fragen, wann ein solches hyperelliptisches Integral mit der beliebig gegebenen Irrationalität $\sqrt{R_{2p+1}^{(1)}(z^{(1)})}$ einer algebraisch-logarithmischen Function gleich sein kann, welche selbst oder für welche das Argument der Logarithmen rational aus

$$z_{2p+1}^{(1)} \text{ und } \sqrt{R_{2p+1}^{(1)}(z_{2p+1}^{(1)})}$$

zusammengesetzt ist.

Ein solches hyperelliptisches Integral zerlegt sich nach den in der vierten Vorlesung gemachten Auseinandersetzungen, von p Integralen erster Gattung, p Integralen zweiter Gattung und algebraisch-logarithmischen Theilen der oben bezeichneten Art abgesehen, in eine Summe von Integralen der Form

$$\text{(o)} \qquad C_1 \int_{\zeta_1}^{z_1} \frac{\sqrt{R(a_1)}\, dz}{(z-a_1)\sqrt{R(z)}} + C_2 \int_{\zeta_1}^{z_1} \frac{\sqrt{R(a_2)}\, dz}{(z-a_2)\sqrt{R(z)}} + \cdots + C_n \int_{\zeta_1}^{z_1} \frac{\sqrt{R(a_n)}\, dz}{(z-a_n)\sqrt{R(z)}},$$

wenn der Kürze halber

$$\zeta_1, z_1, \sqrt{R(z)}$$

statt

$$\zeta_{2p+1}^{(1)}, z_{2p+1}^{(1)}, \sqrt{R_{2p+1}^{(1)}(z)}$$

geschrieben wird, und $a_1, a_2, \ldots a_n$ Constanten bedeuten, für welche die unter dem Integrale befindliche rationale Function, welche nach Absonderung einer rationalen Function mit

$$\frac{1}{\sqrt{R(z)}}$$

multiplicirt ist, unendlich wird, soweit diese Werthe nicht Verzweigungspunkte von $\sqrt{R(z)}$ sind; und diese Summe (o) soll mit einem aus p Integralen zweiter Gattung, p Integralen erster Gattung und einem algebraisch-logarithmischen Theile zusammengesetzten Ausdruck identisch sein.

Bezeichnet man mit

$$a_k^+ \text{ und } a_k^-$$

den auf dem positiven oder negativen Blatte der zu $\sqrt{R(z)}$ gehörigen Riemann'schen Fläche gelegenen Punkt a_k, und setzt man

$$\text{(p)} \quad \int \frac{\sqrt{R(a_k)}\, dz}{(z-a_k)\sqrt{R(z)}} + c_0 \int \frac{dz}{\sqrt{R(z)}} + c_1 \int \frac{z\, dz}{\sqrt{R(z)}} + \cdots + c_{p-1} \int \frac{z^{p-1} dz}{\sqrt{R(z)}} = H(z, a_k^+, a_k^-),$$

so wird diese Function ein hyperelliptisches Hauptintegral dritter Gattung sein, da der Coefficient des logarithmischen Gliedes in den beiden Unstetigkeitspunkten

$$a_k, +\sqrt{R(a_k)};\ a_k, -\sqrt{R(a_k)} \text{ oder } a_k^+, a_k^-$$

die positive und negative Einheit ist, und ausserdem wird man, wie früher gezeigt worden, die Constanten

$$c_0, c_1, c_2, \dots c_{p-1}$$

so bestimmen können, dass die Periodicitätsmoduln jenes Hauptintegrales an allen Querschnitten der einen oder der andern Art verschwinden; bezeichnet man ferner ein in den Punkten z_1 und ζ_1 auf den bestimmten Blättern logarithmisch unendlich werdendes Hauptintegral dritter Gattung mit an derselben Reihe der Querschnitte verschwindenden Periodicitätsmoduln durch

$$H(z, z_1, \zeta_1),$$

so wird nach dem früher erwiesenen Satze von der Vertauschung der Gränzen und Unstetigkeitspunkte

$$\int_{\zeta_1}^{z_1} dH(z, a_k^+, a_k^-) = \int_{a_k^-}^{a_k^+} dH(z, z_1, \zeta_1)$$

sein, und es würde dann in Folge dieser Relation, indem die mit den Constanten c multiplicirten Integrale erster Gattung hinzugenommen werden, die Gleichung zu untersuchen sein

$$\begin{aligned}(38)\qquad & C_1 \int_{a_1^-}^{a_1^+} dH(z, z_1, \zeta_1) + C_2 \int_{a_2^-}^{a_2^+} dH(z, z_1, \zeta_1) + \cdots + C_n \int_{a_n^-}^{a_n^+} dH(z, z_1, \zeta_1) \\
= \quad & A_0 \int_{\zeta_1}^{z_1} \frac{z^{2p-1} dz}{\sqrt{R(z)}} + A_1 \int_{\zeta_1}^{z_1} \frac{z^{2p-2} dz}{\sqrt{R(z)}} + \cdots + A_{p-1} \int_{\zeta_1}^{z_1} \frac{z^p dz}{\sqrt{R(z)}} \\
+ \quad & B_0 \int_{\zeta_1}^{z_1} \frac{z^{p-1} dz}{\sqrt{R(z)}} + B_1 \int_{\zeta_1}^{z_1} \frac{z^{p-2} dz}{\sqrt{R(z)}} + \cdots + B_{p-1} \int_{\zeta_1}^{z_1} \frac{dz}{\sqrt{R(z)}} \\
+ \quad & U + D_1 \log V_1 + D_2 \log V_2 + \cdots + D_\mu \log V_\mu,\end{aligned}$$

in welcher die Grössen

$$U, V_1, V_2, \cdots V_\mu$$

rational aus

$$z_1 \text{ und } \sqrt{R(z_1)}$$

zusammengesetzt sind, und wobei angenommen wird, dass nicht zwischen einer geringeren Anzahl von denselben Integralen der linken Seite dieser Gleichung eine ähnliche Beziehung besteht, indem wir sonst diese unserer weiteren Betrachtung zu Grunde legen. Offenbar darf ferner ohne Beschränkung der Allgemeinheit vorausgesetzt werden, dass zwischen den Grössen

$$D_1, D_2, \cdots D_\mu$$

keine homogene lineare ganzzahlige Gleichung der Form

$$\lambda_1 D_1 + \lambda_2 D_2 + \cdots + \lambda_\mu D_\mu = 0$$

besteht, weil, wenn eine solche stattfände, der Ausdruck

$$D_1 \log V_1 + D_2 \log V_2 + \cdots + D_\mu \log V_\mu$$

in die Form

$$\frac{D_1}{\lambda_\mu} \log \frac{V_1^{\lambda_\mu}}{V_\mu^{\lambda_1}} + \frac{D_2}{\lambda_\mu} \log \frac{V_2^{\lambda_\mu}}{V_\mu^{\lambda_2}} + \cdots + \frac{D_{\mu-1}}{\lambda_\mu} \log \frac{V_{\mu-1}^{\lambda_\mu}}{V_\mu^{\lambda_{\mu-1}}}$$

übergehen würde, und man daher nur von vornherein die Anzahl der Logarithmen auf der rechten Seite der Gleichung (38) auf die kleinste reducirt anzunehmen brauchte. Sei nun z. B.

$$V_\varrho = p_\varrho + q_\varrho \sqrt{R(z_1)},$$

worin p_ϱ und q_ϱ rationale Functionen von z_1 bedeuten sollen, oder

$$V_\varrho = \frac{f_\varrho + g_\varrho \sqrt{R(z_1)}}{h_\varrho},$$

wenn f_ϱ, g_ϱ, h_ϱ ganze Functionen von z_1 sind, so verwandle man in Gleichung (38) die Irrationalität in die entgegengesetzte und ziehe die so erhaltene Gleichung von Gleichung (38) ab; man erhält offenbar für alle Integrale das doppelte, also die Form der Gleichung (38) unverändert, während die logarithmischen Glieder die Form annehmen

$$\log \frac{f_\varrho + g_\varrho \sqrt{R(z_1)}}{f_\varrho - g_\varrho \sqrt{R(z_1)}}.$$

Wird nun

$$(39) \qquad f_\varrho^2 - g_\varrho^2 R(z_1) = M(z_1 - \gamma_1)^{m_1} (z_1 - \gamma_2)^{m_2} \cdots (z_1 - \gamma_r)^{m_r}$$

gesetzt, so dass

$$\begin{aligned} \log\bigl(f_\varrho^2 - g_\varrho^2 R(z_1)\bigr) &= \log\bigl(f_\varrho + g_\varrho \sqrt{R(z_1)}\bigr) + \log\bigl(f_\varrho - g_\varrho \sqrt{R(z_1)}\bigr) \\ &= \log M + m_1 \log(z_1 - \gamma_1) + m_2 \log(z_1 - \gamma_2) + \cdots + m_r \log(z_1 - \gamma_r) \end{aligned}$$

ist, so sieht man, dass

$$\log\left(f_\varrho + g_\varrho\sqrt{R(z_1)}\right)$$

für

$$\gamma_1, \gamma_2, \dots \gamma_r$$

logarithmisch unendlich wird, wenn der zugehörige Werth der Irrationalität aus der Gleichung

$$\sqrt{R(\gamma_s)} = -\frac{f_\varrho(\gamma_s)}{g_\varrho(\gamma_s)}$$

bestimmt wird, und keine dieser logarithmischen Unendlichkeiten kann sich, da f_ϱ und g_ϱ ohne gemeinsamen Theiler vorausgesetzt werden können, auf der rechten Seite der Gleichung (38) gegen andere wegheben, weil sonst eine ganzzahlige homogene lineare Gleichung zwischen den Coefficienten der logarithmischen Glieder statthaben müsste, welcher Fall oben ausdrücklich ausgeschlossen war. Da aber die linke Seite der in der obigen Weise transformirten Gleichung (38), wie man aus dem Umkehrungssatze von Gränzen und Unstetigkeitspunkten unmittelbar erkennt, für

$$\text{(k)} \qquad a_1, +\sqrt{R(a_1)};\ a_1, -\sqrt{R(a_1)};\ a_2, +\sqrt{R(a_2)};\ a_2, -\sqrt{R(a_2)}; \dots \\ a_n, +\sqrt{R(a_n)};\ a_n, -\sqrt{R(a_n)}$$

und nur für diese Werthe unendlich und zwar logarithmisch unendlich wird, während die Integrale zweiter Gattung auf der rechten Seite der Gleichung (38) nur für $z = \infty$ auf beiden Blättern unendlich werden, und die Integrale erster Gattung endlich sind, so folgt, dass sämmtliche Werthe

$$\gamma_1, \gamma_2, \dots \gamma_r$$

mit den zugehörigen Irrationalitäten zu den Werthen der Reihe (k) gehören. Aus der Existenz der Gleichung (39) aber folgt nach dem Abel'schen Theorem, indem wir annehmen dürfen, dass der Grad von $g_\varrho^2 R(z_1)$ den von f_ϱ^2 nicht übersteigt, dass die γ-Werthe zu oberen Gränzen von gleichartigen hyperelliptischen Integralen gemacht werden können, deren Summe eine algebraisch-logarithmische Function ist, während die Irrationalitäten aus der Gleichung

$$\sqrt{R(\gamma_s)} = -\frac{f_\varrho(\gamma_s)}{g_\varrho(\gamma_s)}$$

bestimmt werden, und dass sie ferner die unteren Gränzen solcher Integrale bilden können, wenn die Irrationalitäten durch

$$\sqrt{R(\gamma_s)} = \frac{f_\varrho(\gamma_s)}{g_\varrho(\gamma_s)}$$

gegeben sind.

Nach der in der sechsten Vorlesung aufgestellten Beziehung für die Addition von Hauptintegralen ergiebt sich, wenn die Werthe γ den Grössen

$$a_1^{\pm}, a_2^{\pm}, \dots a_r^{\pm}$$

gleichgesetzt werden, die folgende Beziehung:

$$(40) \qquad m_1 \int_{a_1^{\pm}}^{a_1^{\mp}} dH(z, z_1, \zeta_1) + m_2 \int_{a_2^{\pm}}^{a_2^{\mp}} dH(z, z_1, \zeta_1) + \cdots + m_r \int_{a_r^{\pm}}^{a_r^{\mp}} dH(z, z_1, \zeta_1)$$
$$= \log \left\{ \frac{f_\varrho(z_1) - g_\varrho(z_1)\sqrt{R(z_1)}}{f_\varrho(z_1) + g_\varrho(z_1)\sqrt{R(z_1)}} \cdot \frac{f_\varrho(\zeta_1) + g_\varrho(\zeta_1)\sqrt{R(\zeta_1)}}{f_\varrho(\zeta_1) - g_\varrho(\zeta_1)\sqrt{R(\zeta_1)}} \right\},$$

welche nothwendig die Form der Gleichung (38) sein muss, da der Annahme nach keine der Gleichung (38) ähnliche existiren sollte, welche von den dort enthaltenen Integralen eine geringere Anzahl enthielte. Setzt man endlich in (40) die durch Vertauschung der Gränzen und Unstetigkeitspunkte sich ergebenden Integrale, so folgt

$$(41) \qquad m_1 \int_{\zeta_1}^{z_1} dH(z, a_1^{\pm}, a_1^{\mp}) + m_2 \int_{\zeta_1}^{z_1} dH(z, a_2^{\pm}, a_2^{\mp}) + \cdots + m_r \int_{\zeta_1}^{z_1} dH(z, a_r^{\pm}, a_r^{\mp})$$
$$= \log \left\{ \frac{f_\varrho(z_1) - g_\varrho(z_1)\sqrt{R(z_1)}}{f_\varrho(z_1) + g_\varrho(z_1)\sqrt{R(z_1)}} \cdot \frac{f_\varrho(\zeta_1) + g_\varrho(\zeta_1)\sqrt{R(\zeta_1)}}{f_\varrho(\zeta_1) - g_\varrho(\zeta_1)\sqrt{R(\zeta_1)}} \right\}$$

als allgemeinste zwischen hyperelliptischen Integralen derselben Ordnung und algebraisch-logarithmischen Functionen bestehende Relation, oder wenn der oben durch die Gleichung (p) definirte Werth von $H(z, a_k^{\pm}, a_k^{\mp})$ eingesetzt wird,

$$(42) \qquad m_1 \int_{\zeta_1}^{z_1} \frac{\pm\sqrt{R(a_1)}\, dz}{(z - a_1)\sqrt{R(z)}} + m_2 \int_{\zeta_1}^{z_1} \frac{\pm\sqrt{R(a_2)}\, dz}{(z - a_2)\sqrt{R(z)}} + \cdots + m_r \int_{\zeta_1}^{z_1} \frac{\pm\sqrt{R(a_r)}\, dz}{(z - a_r)\sqrt{R(z)}}$$
$$+\beta_0 \int_{\zeta_1}^{z_1} \frac{dz}{\sqrt{R(z)}} + \beta_1 \int_{\zeta_1}^{z_1} \frac{z\, dz}{\sqrt{R(z)}} + \cdots + \beta_{p-1} \int_{\zeta_1}^{z_1} \frac{z^{p-1} dz}{\sqrt{R(z)}}$$
$$= \log \left\{ \frac{f_\varrho(z_1) - g_\varrho(z_1)\sqrt{R(z_1)}}{f_\varrho(z_1) + g_\varrho(z_1)\sqrt{R(z_1)}} \cdot \frac{f_\varrho(\zeta_1) + g_\varrho(\zeta_1)\sqrt{R(\zeta_1)}}{f_\varrho(\zeta_1) - g_\varrho(\zeta_1)\sqrt{R(\zeta_1)}} \right\},$$

worin $m_1, m_2, \dots m_r$ ganze Zahlen, $\beta_0, \beta_1, \dots \beta_{p-1}$ Constanten vorstellen, deren Bedeutung aus der oben gegebenen Bestimmung von $c_0, c_1, \dots c_{p-1}$ unmittelbar zu ersehen ist.

Man kann endlich noch die Frage auf werfen, ob in algebraische Relationen zwischen hyperelliptischen Integralen auch jene eindeutigen Umkehrungsfunctionen der Integrale niederer Gattung, also die Exponentialfunctionen, die trigonometrischen und elliptischen Functionen eintreten können, und zwar wollen wir diese Untersuchung auf Grund eines allgemeinen Satzes über den algebraischen Zusammenhang zwischen den Integralen verschiedener Differentialgleichungen anstellen, den wir an dieser Stelle unter den Beschränkungen, wie sie die Lösung der oben gestellten Aufgabe zulässt, aussprechen und herleiten.

Sei Z ein Integral der irreductiblen Differentialgleichung erster Ordnung

$$f\left(x, z, \tfrac{dz}{dx}\right) = 0, \tag{43}$$

in welcher f eine ganze Function der darin enthaltenen Grössen bedeuten soll, ferner

$$Z_1, Z_2, \ldots, Z_r$$

eine Reihe von r andern Integralen der resp. irreductiblen Differentialgleichungen erster Ordnung

$$\begin{aligned}
&\left(\frac{dz_1}{dx}\right)^{k_1} + \varphi_1(x, z_1)\left(\frac{dz_1}{dx}\right)^{k_1-1} + \cdots + \varphi_{k_1-1}(x, z_1)\frac{dz_1}{dx} + \varphi_{k_1}(x, z_1) = 0,\\
&\left(\frac{dz_2}{dx}\right)^{k_2} + \psi_1(x, z_2)\left(\frac{dz_2}{dx}\right)^{k_2-1} + \cdots + \psi_{k_2-1}(x, z_2)\frac{dz_2}{dx} + \psi_{k_2}(x, z_2) = 0,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&\left(\frac{dz_r}{dx}\right)^{k_r} + \chi_1(x, z_r)\left(\frac{dz_r}{dx}\right)^{k_r-1} + \cdots + \chi_{k_r-1}(x, z_r)\frac{dz_r}{dx} + \chi_{k_r}(x, z_r) = 0,
\end{aligned} \tag{44}$$

in welchen

$$\varphi_\alpha(x, z_1), \psi_\alpha(x, z_2), \ldots \chi_\alpha(x, z_r)$$

rationale Functionen vorstellen, und werde von den Integralen $Z_1, Z_2 \ldots Z_r$ vorausgesetzt, dass sie weder selbst algebraische Functionen von x sind, noch zwischen ihnen eine algebraische Beziehung besteht, dass dieselben jedoch mit Z durch den algebraischen Zusammenhang

$$F(x, Z, Z_1, Z_2, \ldots Z_r) = 0 \tag{45}$$

verbunden sind; wir wollen die Eigenschaft und Form der Gleichung (45) untersuchen.

Differentiirt man diese letztere Gleichung nach x und eliminirt zwischen den drei Gleichungen

$$F(x, Z, Z_1, Z_2, \ldots Z_r) = 0, \quad \frac{dF}{dx} = 0, \quad f\left(x, Z, \frac{dZ}{dx}\right) = 0$$

die beiden Grössen Z und $\frac{dZ}{dx}$, so ergiebt sich eine Gleichung von der Form

$$H\left(x, Z_1, Z_2, \ldots Z_r, \frac{dZ_1}{dx}, \frac{dZ_2}{dx}, \ldots \frac{dZ_r}{dx}\right) = 0, \tag{46}$$

worin H eine ganze Function der darin enthaltenen Grössen bedeutet; und dieses in rationaler Form hergeleitete Eliminationsresultat wird auch ersetzt werden können durch dasjenige, das man erhält, wenn man vermittels Auflösung der Gleichung (45) nach Z, in Bezug auf welche Variable sie vom k^{ten} Grade sein mag,

$$Z = \omega_1(x, Z_1, \dots Z_r),\ Z = \omega_2(x, Z_1, \dots Z_r), \dots Z = \omega_k(x, Z_1, \dots Z_r),$$

ermittelt, die Grössen

$$\frac{dZ}{dx} = \frac{d\omega_1(x, Z_1, \dots Z_r)}{dx}, \quad \frac{dZ}{dx} = \frac{d\omega_2(x, Z_1, \dots Z_r)}{dx}, \dots \\ \frac{dZ}{dx} = \frac{d\omega_k(x, Z_1, \dots Z_r)}{dx}$$

bildet und in die Gleichung (43) einsetzt, woraus als zweite Form des Eliminationsresultates

$$(47) \qquad \begin{aligned} &f\left(x, \omega_1(x, Z_1, \dots Z_r), \frac{d\omega_1(x, Z_1, \dots Z_r)}{dx}\right) \\ \times &f\left(x, \omega_2(x, Z_1, \dots Z_r), \frac{d\omega_2(x, Z_1, \dots Z_r)}{dx}\right) \cdots \\ \times &f\left(x, \omega_k(x, Z_1, \dots Z_r), \frac{d\omega_k(x, Z_1, \dots Z_r)}{dx}\right) = 0 \end{aligned}$$

folgt.

Denkt man sich nun aus den r Gleichungen (44), wenn in dieselben Z_1, $Z_2, \dots Z_r$ statt z_1, $z_2, \dots z_r$ gesetzt ist, und der Gleichung (46) die r Grössen

$$\frac{dZ_1}{dx}, \frac{dZ_2}{dx}, \dots \frac{dZ_r}{dx}$$

eliminirt, so würde sich eine algebraische Beziehung von der Form

$$(48) \qquad K(x, Z_1, Z_2, \dots Z_r) = 0$$

zwischen den Grössen Z_1, $Z_2, \dots Z_r$ ergeben, welche der oben gemachten Voraussetzung gemäss nicht bestehen darf, und es wird somit das Eliminationsresultat (48) für alle beliebigen Werthe der Grössen Z_1, $Z_2, \dots Z_r$ identisch erfüllt sein müssen. Aber auch diese eben ausgeführte Elimination und daher jene in den Grössen Z_1, $Z_2, \dots Z_r$ identische Gleichung kann anders dargestellt werden; berechnet man nämlich aus den Differentialgleichungen

(44) die Werthe

$$\begin{array}{l}
\frac{dZ_1}{dx} = h_{1\,1}(x, Z_1),\ \frac{dZ_1}{dx} = h_{1\,2}(x, Z_1), \cdots \frac{dZ_1}{dx} = h_{1\,k_1}(x, Z_1), \\
\frac{dZ_2}{dx} = h_{2\,1}(x, Z_2),\ \frac{dZ_2}{dx} = h_{2\,2}(x, Z_2), \cdots \frac{dZ_2}{dx} = h_{2\,k_2}(x, Z_2), \\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
\frac{dZ_r}{dx} = h_{r\,1}(x, Z_r),\ \frac{dZ_r}{dx} = h_{r\,2}(x, Z_r), \cdots \frac{dZ_r}{dx} = h_{r\,k_r}(x, Z_r),
\end{array}$$

und setzt dieselben in all' ihren Verbindungen in (46) ein, so folgt, dass

$$\prod_{\alpha,\beta\dots\varrho} H\big(x, Z_1, Z_2, \dots Z_r,\ h_{1\,\alpha}(x, Z_1),\ h_{2\,\beta}(x, Z_2), \dots h_{r\,\varrho}(x, Z_r)\big) = 0$$

für alle beliebigen Werthe von Z_1, $Z_2, \dots Z_r$ identisch befriedigt, oder dass in Folge der oben vorausgesetzten Irreductibilität der Gleichungen (44) die Gleichung

$$H\big(x, Z_1, Z_2, \dots Z_r,\ h_{1\,\alpha}(x, Z_1),\ h_{2\,\beta}(x, Z_2), \dots h_{r\,\varrho}(x, Z_r)\big) = 0$$

für eine beliebige Werthecombination von α, $\beta, \dots \varrho$ erfüllt sein muss, wenn statt Z_1, $Z_2, \dots Z_r$ beliebige andere Grössen gesetzt werden, oder dass endlich die Gleichung (46) ebenfalls stattfinden muss, wenn statt Z_1, $Z_2, \dots Z_r$ andere Integrale

$$Z_1', Z_2', \dots Z_r'$$

der Differentialgleichungen (44) gesetzt werden.

Da aber die Gleichung (46) nur eine andere Form des Eliminationsresultates als das durch (47) dargestellte angiebt, so wird also auch die identische Beziehung bestehen

(49)
$$\begin{aligned}
&f\left(x, \omega_1(x, Z_1', \dots Z_r'), \frac{d\omega_1(x, Z_1', \dots Z_r')}{dx}\right) \\
\times &f\left(x, \omega_2(x, Z_1', \dots Z_r'), \frac{d\omega_2(x, Z_1', \dots Z_r')}{dx}\right) \cdots \\
\times &f\left(x, \omega_k(x, Z_1', \dots Z_r'), \frac{d\omega_k(x, Z_1', \dots Z_r')}{dx}\right) = 0,
\end{aligned}$$

welche wiederum nichts anderes aussagt, als dass die Gleichung (43) auch die durch den Ausdruck

(50)
$$Z' = \omega_\alpha(x, Z_1', Z_2', \dots Z_r')$$

gegebene Function zum Integral hat, wenn α einen der Indices 1, $2, \dots k$ bedeutet. Da sich nun aus (50) der Gleichung (45) gemäss

(51)
$$F(x, Z', Z_1', Z_2', \dots Z_r') = 0$$

ergiebt, so folgt,

dass, wenn zwischen den Integralen

$$Z, Z_1, Z_2, \dots Z_r$$

der irreductiblen Differentialgleichungen (43) *und* (44) *ein algebraischer Zusammenhang stattfindet, und man setzt statt der Grössen* Z_1, $Z_2, \dots Z_r$ r *beliebige andere Integrale der Differentialgleichungen* (44), *so wird die algebraische Beziehung noch fortbestehen, wenn für* Z *ein gewisses anderes Integral* Z' *der Differentialgleichung* (43) *gesetzt wird.*

Um diesen Satz auf das oben gestellte Problem anzuwenden, nämlich zu untersuchen, ob in eine algebraische Beziehung zwischen hyperelliptischen Integralen auch die Umkehrungsfunctionen der niederen Integrale eintreten können, sei Z die Lösung einer irreductiblen Differentialgleichung

$$f_0(x)\left(\frac{dz}{dx}\right)^2 + f_1(x)\frac{dz}{dx} + f_2(x) = 0, \tag{52}$$

in welcher

$$f_0(x),\ f_1(x),\ f_2(x)$$

ganze Functionen von x bedeuten, deren Integral also das allgemeine hyperelliptische Integral sein wird, ferner seien

$$Z_2,\ Z_3, \dots Z_r$$

Lösungen ähnlicher Differentialgleichungen, also wieder hyperelliptische Integrale, und endlich Z_1, durch

$$Z_1 = e^v$$

definirt, worin v eine algebraische Function von x bedeuten soll, also ein Integral der Differentialgleichung

$$\frac{dz_1}{dx} = z_1\frac{dv}{dx}, \tag{53}$$

welche mit der algebraischen Gleichung in Verbindung gebracht, welche v als Function von x definirt, die Form der Differentialgleichungen (44) annimmt.

Bestünde nun ein algebraischer Zusammenhang zwischen diesen hyperelliptischen Integralen und der Exponentialfunction von der Form

$$Z = \omega(x, Z_1, Z_2, \dots Z_r), \tag{54}$$

so würde man nach dem obigen Satze berechtigt sein, für Z_1 das Integral mZ_1 der Gleichung (53) einzuführen, wenn nur für Z ein gewisses anderes Integral der Gleichung (52) gesetzt wird; da aber alle Integrale der letztbezeichneten Gleichung in der Form

$$Z + \mu$$

enthalten sind, worin μ eine bestimmte Function von m sein wird, so folgt aus (54), wenn zur Abkürzung

$$\omega(x, Z_1, Z_2, \dots Z_r) = \omega(Z_1)$$

gesetzt wird,

$$\omega(mZ_1) = \omega(Z_1) + \mu = \omega(Z_1) + \varphi(m), \tag{55}$$

welche Gleichung für jedes Z_1 und jedes constante m gültig ist. Setzt man hierin $Z_1 = 1$, so folgt

$$\varphi(m) = \omega(m) - \omega(0)$$

und somit

$$\omega(mZ_1) = \omega(Z_1) + \omega(m) - \omega(0), \tag{56}$$

woraus sich durch Differentiation nach Z_1 und m

$$\begin{aligned} m\omega'(mZ_1) &= \omega'(Z_1) \\ Z_1\omega'(mZ_1) &= \omega'(m) \end{aligned}$$

also

$$Z_1\omega'(Z_1) = m\omega'(m)$$

ergiebt; daraus folgt, dass

$$Z_1\omega'(Z_1) = P$$

ist, worin P eine von Z_1 unabhängige Grösse bedeutet, oder dass

$$\omega(Z_1) = \omega(x, Z_1, Z_2, \dots Z_n) = P \log Z_1 + Q = Pv + Q,$$

d. h. *dass e^ν selbst in der Relation gar nicht enthalten ist.*

Es mag endlich noch untersucht werden, ob in jener algebraischen Beziehung zwischen hyperelliptischen Integralen etwa noch eine elliptische Function von der Form

$$Z_1 = \sin \operatorname{am}(u, k),$$

worin u eine algebraische Function von x bedeutet, enthalten sein kann. Da diese Function der Differentialgleichung genügt

$$\frac{dz_1}{dx} = \sqrt{(1 - z_1^2)(1 - k^2 z_1^2)} \frac{du}{dx},$$

welche wiederum wie oben in eine algebraische Differentialgleichung zwischen z_1, und x transformirt werden kann, ferner zu jedem particulären Integrale

$$Z_1' = \sin\operatorname{am}(u+\alpha),$$

in welchem α eine Constante bedeutet, ein anderes Integral

$$Z_1' = \sin\operatorname{am}(u+c) = \sin\operatorname{am}(u+\alpha+c-\alpha)$$

gehört, in welchem c eine willkürliche Constante ist, so wird sich mit Hülfe des Additionstheorems, wenn

$$\sin\operatorname{am}(c-\alpha) = m$$

gesetzt wird,

$$Z_1' = \frac{Z_1\sqrt{(1-m^2)(1-k^2m^2)} + m\sqrt{(1-Z_1^2)(1-k^2Z_1^2)}}{1-k^2m^2Z_1^2}$$

ergeben, und was auch α sein mag, d. h. welches der particulären Integrale der obigen Form wir auch wählen, es wird für jeden beliebigen Werth von m auch Z_1' ein Integral sein. Genau dieselben Schlüsse wie vorher führen, wenn die analoge Bezeichnung gewählt wird, auf die Gleichung

$$\omega\left(\frac{Z_1\sqrt{(1-m^2)(1-k^2m^2)} + m\sqrt{(1-Z_1^2)(1-k^2Z_1^2)}}{1-k^2m^2Z_1^2}\right) = \omega(Z_1) + \varphi(m)$$

oder auch, wenn $Z_1 = 0$ gesetzt wird, auf

$$\omega\left(\frac{Z_1\sqrt{(1-m^2)(1-k^2m^2)} + m\sqrt{(1-Z_1^2)(1-k^2Z_1^2)}}{1-k^2m^2Z_1^2}\right) = \omega(Z_1) + \omega(m) - \omega(0).$$

Differentiirt man nun diese Gleichung nach Z_1 und m, und setzt die beiden so erhaltenen Gleichungen zusammen, so folgt

$$\frac{\dfrac{\partial\omega(Z_1)}{\partial Z_1}}{\dfrac{\partial}{\partial Z_1}\left[\dfrac{Z_1\sqrt{(1-m^2)(1-k^2m^2)} + m\sqrt{(1-Z_1^2)(1-k^2Z_1^2)}}{1-k^2m^2Z_1^2}\right]}$$

$$= \frac{\dfrac{\partial\omega(m)}{\partial m}}{\dfrac{\partial}{\partial m}\left[\dfrac{Z_1\sqrt{(1-m^2)(1-k^2m^2)} + m\sqrt{(1-Z_1^2)(1-k^2Z_1^2)}}{1-k^2m^2Z_1^2}\right]}$$

oder

$$\frac{\dfrac{\partial\omega(Z_1)}{\partial Z_1}}{\dfrac{\partial Z_1'}{\partial Z_1}} = \frac{\dfrac{\partial\omega(m)}{\partial m}}{\dfrac{\partial Z_1'}{\partial m}} \tag{57}$$

als Gleichung zur Bestimmung von ω.

Da aber, wenn zur Abkürzung

$$Z_1 = \sin\ \mathrm{am}\ v,\ \ m = \sin\ \mathrm{am}\ w$$

gesetzt wird,

$$\frac{\partial Z_1'}{\partial Z_1} = \frac{\partial \sin\ \mathrm{am}\ (v+w)}{\partial \sin\ \mathrm{am}\ v} = \frac{\partial \sin\ \mathrm{am}\ (v+w)}{\partial v}\frac{1}{\dfrac{\partial \sin\ \mathrm{am}\ v}{\partial v}}$$
$$= \frac{\partial \sin\ \mathrm{am}\ (v+w)}{\partial v}\frac{1}{\sqrt{(1-Z_1^2)(1-k^2Z_1^2)}}$$

und ebenso

$$\frac{\partial Z_1'}{\partial m} = \frac{\partial \sin\ \mathrm{am}\ (v+w)}{\partial \sin\ \mathrm{am}\ w} = \frac{\partial \sin\ \mathrm{am}\ (v+w)}{\partial w}\frac{1}{\dfrac{\partial \sin\ \mathrm{am}\ w}{\partial w}}$$
$$= \frac{\partial \sin\ \mathrm{am}\ (v+w)}{\partial w}\frac{1}{\sqrt{(1-m^2)(1-k^2m^2)}}$$

ist, so wird die obige Bestimmungsgleichung (57) in

$$\frac{\partial\omega(Z_1)}{\partial Z_1}\sqrt{(1-Z_1^2)(1-k^2Z_1^2)} = \frac{\partial\omega(m)}{\partial m}\sqrt{(1-m^2)(1-k^2m^2)}$$

übergehen und daher

$$\frac{\partial\omega(Z_1)}{\partial Z_1}\sqrt{(1-Z_1^2)(1-k^2Z_1^2)} = g$$

eine von Z_1 unabhängige Constante sein. Es folgt hieraus

$$\frac{\partial\omega(Z_1)}{\partial Z_1} = \frac{g}{\sqrt{(1-Z_1^2)(1-k^2Z_1^2)}}$$

oder wegen

$$Z_l = \sin\ \mathrm{am}\ (u+\alpha)$$

die Beziehung

$$\omega(Z_1) = gu + h;$$

es ist somit wieder nachgewiesen, *dass auch die elliptische Umkehrungsfunction nicht in jener algebraischen Verbindungsgleichung zwischen hyperelliptischen Integralen vorkommen kann.*

Das oben erwähnte Princip reicht aus, um auch die Unmöglichkeit des Vorkommens der hyperelliptischen Umkehrungsfunctionen in einer algebraischen Relation zwischen hyperelliptischen Integralen festzustellen.

Achte Vorlesung.

Reduction hyperelliptischer Integrale auf niedere Transcendente.

Es soll im Folgenden eine Anwendung der in den letzten Vorlesungen entwickelten Theorie auf die Lösung des Problems gegeben werden, die notwendigen und hinreichenden Bedingungen dafür aufzustellen, dass hyperelliptische Integrale auf algebraisch-logarithmische Functionen reducirbar sind.

Sei

$$R(z) = A(z-\alpha_1)(z-\alpha_2)\cdots(z-\alpha_{2p+1}) \tag{1}$$

und

$$\int f\big(z, \sqrt{R(z)}\,\big)\, dz, \tag{a}$$

worin f eine rationale Function von z und $\sqrt{R(z)}$ bedeutet, in Betreff der Möglichkeit der Reduction auf algebraisch-logarithmische Functionen zu untersuchen (der unpaare Grad des Polynoms $R(z)$ giebt bekanntlich keine Beschränkung der Allgemeinheit des gestellten Problems), so ist ersichtlich, dass man sich nur mit einem Integrale von der Form

$$\int \frac{F(z)dz}{\sqrt{R(z)}}, \tag{b}$$

worin $F(z)$ eine rationale Function von z bedeutet, wird zu beschäftigen haben, da sich das vorgelegte stets auf ein solches und ein Integral einer rationalen Function von z zurückführen lässt, welches letztere durch eine algebraisch-logarithmische Function dargestellt werden kann.

Fragen wir zuerst nach den nothwendigen und hinreichenden Bedingungen dafür, dass ein Integral von der Form (b) auf eine algebraische Function von z oder mit Berücksichtigung des in der letzten Vorlesung bewiesenen Satzes auf eine rationale Function von z und $\sqrt{R(z)}$ reducirbar ist, so wird, wenn

$$z_1, z_2, \ldots z_n$$

die Werthe von z bedeuten, für welche $F(z)$ unendlich wird, nach der in der vierten Vorlesung gegebenen Zerlegung eines hyperelliptischen Integrales die Gleichung statthaben müssen:

$$
\begin{aligned}
(2)\qquad & C_1 \int \frac{\sqrt{R(z_1)}\, dz}{(z-z_1)\sqrt{R(z)}} + C_2 \int \frac{\sqrt{R(z_2)}\, dz}{(z-z_2)\sqrt{R(z)}} + \cdots + C_n \int \frac{\sqrt{R(z_n)}\, dz}{(z-z_n)\sqrt{R(z)}} \\
+ \quad & l^{(0)} \int \frac{z^{2p-1} dz}{\sqrt{R(z)}} \quad + \quad l^{(1)} \int \frac{z^{2p-2} dz}{\sqrt{R(z)}} \quad + \cdots + l^{(p-1)} \int \frac{z^p dz}{\sqrt{R(z)}} \\
+ \quad & k^{(p)} \int \frac{z^{p-1} dz}{\sqrt{R(z)}} \quad + \quad k^{(p+1)} \int \frac{z^{p-2} dz}{\sqrt{R(z)}} \quad + \cdots + k^{(2p-1)} \int \frac{dz}{\sqrt{R(z)}} + f(z)\sqrt{R(z)} \\
& = q\sqrt{R(z)},
\end{aligned}
$$

worin die Grössen

$$C_1, C_2, \ldots C_n, l^{(0)}, l^{(1)}, \ldots l^{(p-1)}, k^{(p)}, k^{(p+1)}, \ldots k^{(2p-1)}, f(z)$$

die dort näher angegebenen Werthe haben, und q eine rationale Function von z bedeutet.

Da nun die Integrale dritter Gattung auf der linken Seite der Gleichung (2) in z_1, $z_2, \ldots z_n$ logarithmisch unendlich werden, und sonst logarithmische Unstetigkeiten in dieser Gleichung nicht vorkommen, so müssen diese aus der in z identischen Gleichung herausfallen, und es ergeben sich somit zunächst als nothwendige Bedingungen für die Reduction eines hyperelliptischen Integrales auf eine algebraische Function

$$C_1 = C_2 = \cdots = C_n = 0,$$

da diese die Coefficienten der Unstetigkeitsfunctionen

$$\log(z-z_1),\ \log(z-z_2), \ldots \log(z-z_n)$$

sind.

Es würde nunmehr eine Summe von hyperelliptischen Normalintegralen erster und zweiter Gattung und eines algebraischen Theiles einer algebraischen oder vielmehr in z und $\sqrt{R(z)}$ rationalen Function gleich sein müssen, was nach den Auseinandersetzungen der fünften Vorlesung das Verschwinden der Coefficienten der einzelnen Fundamentalintegrale der beiden Gattungen nach sich zieht, und umgekehrt ist das Verschwinden sämmtlicher k, l, C oder der Integrale erster, zweiter und dritter Gattung für die Reduction eines hyperelliptischen Integrales auf eine algebraische Function hinreichend; wenn wir somit die in der vierten Vorlesung hergeleiteten Werthe der k, l, C benutzen, so ergeben sich als nothwendige und hinreichende Bedingungen dafür, dass das Integral

$$\int \frac{F(z)\, dz}{\sqrt{R(z)}}$$

auf algebraische Functionen reducirbar ist, die folgenden:

$$\left[\frac{F(t)}{\sqrt{R(t)}}\right]_{(t-z_1)^{-1}} = 0, \quad \left[\frac{F(t)}{\sqrt{R(t)}}\right]_{(t-z_2)^{-1}} = 0, \ldots \left[\frac{F(t)}{\sqrt{R(t)}}\right]_{(t-z_n)^{-1}} = 0, \tag{3}$$

$$\sum_{\alpha=1}^{n} \left[\frac{F(t)}{\sqrt{R(t)}} \int_{z_\alpha} \frac{F_r(t)\, dt}{\sqrt{R(t)}}\right]_{(t-z_\alpha)^{-1}} - \left[\frac{F(t)}{\sqrt{R(t)}} \int_{\infty} \frac{F_r(t)\, dt}{\sqrt{R(t)}}\right]_{t^{-1}} = 0, \tag{4}$$

wenn

$$\begin{aligned} R(z) &= Az^{2p+1} + B_0 z^{2p} + B_1 z^{2p-1} + \cdots + B_{2p-1} z + B_{2p}, \\ F_r(t) &= \frac{2p-2r-1}{2} At^r + \frac{2p-2r}{2} B_0 t^{r-1} + \frac{2p-2r+1}{2} B_1 t^{r-2} + \cdots \\ &\quad + \frac{2p-r-3}{2} B_{r-3} t^2 + \frac{2p-r-2}{2} B_{r-2} t + \frac{2p-r-1}{2} B_{r-1}, \end{aligned}$$

und

$$r = 0, 1, 2, \ldots p-1, p, \ldots 2p-1$$

gesetzt wird.

Sind diese Bedingungen erfüllt, so ist auch der algebraische Werth des vorgelegten hyperelliptischen Integrales gefunden, indem derselbe, wie aus der Gleichung (2) zu ersehen,

$$f(z)\sqrt{R(z)},$$

oder

$$\left\{\sum_{\alpha=1}^{n} \left[\frac{F(t)}{\sqrt{R(t)}} \int_{z_\alpha} \frac{dt}{(t-z)\sqrt{R(t)}}\right]_{(t-z_\alpha)^{-1}} - \left[\frac{F(t)}{\sqrt{R(t)}} \int_{\infty} \frac{dt}{(t-z)\sqrt{R(t)}}\right]_{t^{-1}}\right\} \sqrt{R(z)}$$

ist.

Wir werfen weiter die Frage nach den nothwendigen und hinreichenden Bedingungen dafür auf, dass ein hyperelliptisches Integral

$$\int \frac{F(z)\, dz}{\sqrt{R(z)}}$$

auf algebraische und logarithmische Functionen von z reducirbar ist oder wiederum nach dem früheren Satze auf rationale Functionen von z und $\sqrt{R(z)}$ und auf Logarithmen eben solcher Functionen.

Setzt man in der hypothetisch angenommenen Gleichung $-\sqrt{R(z)}$ statt $\sqrt{R(z)}$ und zieht die so erhaltene Gleichung von der ersteren ab, so ergiebt sich als zu befriedigende Gleichung die folgende:

$$
\begin{aligned}
(5) \qquad & C_1 \int \frac{\sqrt{R(z_1)}\, dz}{(z-z_1)\sqrt{R(z)}} + C_2 \int \frac{\sqrt{R(z_2)}\, dz}{(z-z_2)\sqrt{R(z)}} + \cdots + C_n \int \frac{\sqrt{R(z_n)}\, dz}{(z-z_n)\sqrt{R(z)}} \\
& + l^{(0)} \int \frac{z^{2p-1} dz}{\sqrt{R(z)}} + l^{(1)} \int \frac{z^{2p-2} dz}{\sqrt{R(z)}} + \cdots + l^{(p-1)} \int \frac{z^p dz}{\sqrt{R(z)}} \\
& + k^{(p)} \int \frac{z^{p-1} dz}{\sqrt{R(z)}} + k^{(p+1)} \int \frac{z^{p-2} dz}{\sqrt{R(z)}} + \cdots + k^{(2p-1)} \int \frac{dz}{\sqrt{R(z)}} \\
& + f(z)\sqrt{R(z)} \\
& = A_1 \log\left(\frac{p_1 - q_1\sqrt{R(z)}}{p_1 + q_1\sqrt{R(z)}}\right) + A_2 \log\left(\frac{p_2 - q_2\sqrt{R(z)}}{p_2 + q_2\sqrt{R(z)}}\right) + \cdots + A_m \log\left(\frac{p_m - q_m\sqrt{R(z)}}{p_m + q_m\sqrt{R(z)}}\right) \\
& + q\sqrt{R(z)},
\end{aligned}
$$

in welcher

$$p_1, q_1, p_2, q_2, \ldots p_m, q_m, q$$

rationale Functionen von z bedeuten.

Vor Allem darf angenommen werden, dass zwischen den Grössen

$$A_1, A_2, \ldots A_m$$

nicht eine ganzzahlige homogene lineare Gleichung

$$r_1 A_1 + r_2 A_2 + \cdots + r_m A_m = 0$$

besteht, da man sonst

$$A_m = -\frac{r_1}{r_m} A_1 - \frac{r_2}{r_m} A_2 - \cdots - \frac{r_{m-1}}{r_m} A_{m-1}$$

setzen und die rechte Seite der Gleichung (5), wenn

$$\left(p_1 - q_1\sqrt{R(z)}\right)^{r_m} \left(p_m + q_m\sqrt{R(z)}\right)^{r_1} = P_1 - Q_1\sqrt{R(z)}$$

gesetzt wird, in die Form

$$
\begin{aligned}
& \frac{A_1}{r_m} \log\left(\frac{P_1 - Q_1\sqrt{R(z)}}{P_1 + Q_1\sqrt{R(z)}}\right) + \frac{A_2}{r_m} \log\left(\frac{P_2 - Q_2\sqrt{R(z)}}{P_2 + Q_2\sqrt{R(z)}}\right) + \cdots \\
& + \frac{A_{m-1}}{r_m} \log\left(\frac{P_{m-1} - Q_{m-1}\sqrt{R(z)}}{P_{m-1} + Q_{m-1}\sqrt{R(z)}}\right) + q\sqrt{R(z)}
\end{aligned}
$$

bringen kann, welche dann der weiteren Untersuchung zu Grunde zu legen wäre.

Es war schon hervorgehoben worden, dass die linke Seite der Gleichung (5) für die Werthe $z_1, z_2, \dots z_n$ und nur für diese logarithmisch unendlich wird und zwar auf beiden Blättern mit den logarithmischen Gliedern

$$\pm C_1 \log(z - z_1),\ \pm C_2 \log(z - z_2), \dots \pm C_n \log(z - z_n),$$

und es wird somit auch die rechte Seite für diese Werthe logarithmisch unendlich sein müssen und nur für diese. Untersucht man nun einen einzelnen der logarithmischen Posten auf der rechten Seite der Gleichung (5)

$$A_k \log\left(\frac{p_k - q_k\sqrt{R(z)}}{p_k + q_k\sqrt{R(z)}}\right),$$

so wird das Argument desselben nur und zwar stets Null oder unendlich, also der Logarithmus in allen Fällen unendlich für Lösungen der Gleichung:

$$p_k^2 - q_k^2 R(z) = 0, \tag{6}$$

wenn diese nicht zu den Verzweigungswerthen $\alpha_1, \alpha_2, \dots \alpha_{2p+1}$ gehören, oder wenn diese Gleichung nicht durch die den beiden Gleichungen

$$p_k = 0 \text{ und } R(z) = 0$$

gemeinsamen Lösungen befriedigt wird, indem wir die gemeinsamen Factoren von p_k und q_k bereits aus dem Logarithmanden herausgeschafft denken. Alle übrigen Lösungen der Gleichung (6) nun werden zu den oben angegebenen Werthen $z_1, z_2, \dots z_n$ gehören müssen; denn wenn diese Gleichung z. B. die Lösung z' und zwar $\tau_k$mal hat, so wird

$$\left(p_k - q_k\sqrt{R(z)}\,\right)\left(p_k + q_k\sqrt{R(Z)}\,\right) = (z - z')^{\tau_k}\varphi(z)$$

sein, worin $\varphi(z)$ für $z = z'$ endlich und von Null verschieden ist, und daher

$$\log\left(p_k - q_k\sqrt{R(z)}\,\right) + \log\left(p_k + q_k\sqrt{R(z)}\,\right) = \tau_k \log(z - z') + \log\phi(z);$$

somit wird, je nachdem die Irrationalität aus der einen oder andern Beziehung

$$\sqrt{R(z')} = \frac{p_k}{q_k} \text{ oder } \sqrt{R(z')} = -\frac{p_k}{q_k}$$

bestimmt wird, das durch jenen logarithmischen Posten gelieferte logarithmische Unstetigkeitsglied

$$\tau_k A_k \log(z - z') \text{ oder } -\tau_k A_k \log(z - z')$$

sein; da aber die rechte Seite der Gleichung (5) nur für die Werthe $z_1, z_2, \dots z_n$ logarithmisch unendlich werden darf, so müsste sich, wenn z' nicht zu dieser Werthereihe gehörte, das eben gefundene Unstetigkeitsglied gegen andere mit derselben Unstetigkeit fortheben, und es müsste dann eine Gleichung von der Form bestehen

$$\pm\tau_1 A_1 \pm \tau_2 A_2 \pm \dots \pm \tau_m A_m = 0,$$

was oben ausdrücklich ausgeschlossen war; man wird somit

$$(7) \quad \begin{aligned} p_1^2 - q_1^2 R(z) &= M_1 (z-\zeta_{1\,1})^{\tau_{1\,1}} (z-\zeta_{1\,2})^{\tau_{1\,2}} \cdots (z-\zeta_{1\,h_1})^{\tau_{1\,h_1}} \\ p_2^2 - q_2^2 R(z) &= M_2 (z-\zeta_{2\,1})^{\tau_{2\,1}} (z-\zeta_{2\,2})^{\tau_{2\,2}} \cdots (z-\zeta_{2\,h_2})^{\tau_{2\,h_2}} \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ p_m^2 - q_m^2 R(z) &= M_m (z-\zeta_{m\,1})^{\tau_{m\,1}} (z-\zeta_{m\,2})^{\tau_{m\,2}} \cdots (z-\zeta_{m\,h_m})^{\tau_{m\,h_m}} \end{aligned}$$

setzen dürfen, worin alle ζ-Werthe, von den Verzweigungspunkten abgesehen, zu den Werthen $z_1, z_2, \dots z_n$ gehören.

Machen wir nun allgemein die Annahme, dass in der oben hypothetisch angesetzten Gleichung (5) zwischen den Grössen

$$C_1, C_2, \dots C_n$$

eine Anzahl von linearen homogenen ganzzahligen Relationen bestehe von der Form

$$(8) \quad \begin{aligned} T_{1\,1}C_1 + T_{1\,2}C_2 + \dots + T_{1\,n}C_n &= 0, \\ T_{2\,1}C_1 + T_{2\,2}C_2 + \dots + T_{2\,n}C_n &= 0, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ T_{n-k\,1}C_1 + T_{n-k\,2}C_2 + \dots + T_{n-k\,n}C_n &= 0, \end{aligned}$$

die von einander unabhängig sein sollen, so wird man $n-k$ der Grössen C, z. B.

$$C_{k+1},\ C_{k+2},\ \dots\ C_n,$$

durch

$$(\mathrm{k}) \quad C_1,\ C_2,\ \dots\ C_k,$$

homogen, linear mit rationalen Coefficienten ausdrücken und annehmen können, dass zwischen den Grössen der Reihe (k) nicht mehr eine lineare homogene ganzzahlige Relation stattfindet.

Stellt man diese Relationen in der Form dar:

$$
(9)\qquad
\begin{aligned}
D\cdot C_{k+1} &= \lambda_{1\,1}C_1 + \lambda_{1\,2}C_2 + \cdots + \lambda_{1\,k}C_k,\\
D\cdot C_{k+2} &= \lambda_{2\,1}C_1 + \lambda_{2\,2}C_2 + \cdots + \lambda_{2\,k}C_k,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
D\cdot C_{n} &= \lambda_{n-k\,1}C_1 + \lambda_{n-k\,2}C_2 + \cdots + \lambda_{n-k\,k}C_k,
\end{aligned}
$$

worin die Grössen D und λ ganze Zahlen bedeuten, so geht die zu befriedigende Gleichung (5), aus deren Existenz wir nothwendige Bedingungen herleiten wollen, in

$$
\begin{aligned}
(10)\quad & \frac{C_1}{D}\left\{D\int\frac{\sqrt{R(z_1)}\,dz}{(z-z_1)\sqrt{R(z)}} + \lambda_{1\,1}\int\frac{\sqrt{R(z_{k+1})}\,dz}{(z-z_{k+1})\sqrt{R(z)}}\right.\\
&\qquad\left. + \lambda_{2\,1}\int\frac{\sqrt{R(z_{k+2})}\,dz}{(z-z_{k+2})\sqrt{R(z)}} + \cdots + \lambda_{n-k\,1}\int\frac{\sqrt{R(z_n)}\,dz}{(z-z_n)\sqrt{R(z)}}\right\}\\
&+\frac{C_2}{D}\left\{D\int\frac{\sqrt{R(z_2)}\,dz}{(z-z_2)\sqrt{R(z)}} + \lambda_{1\,2}\int\frac{\sqrt{R(z_{k+1})}\,dz}{(z-z_{k+1})\sqrt{R(z)}}\right.\\
&\qquad\left. + \lambda_{2\,2}\int\frac{\sqrt{R(z_{k+2})}\,dz}{(z-z_{k+2})\sqrt{R(z)}} + \cdots + \lambda_{n-k\,2}\int\frac{\sqrt{R(z_n)}\,dz}{(z-z_n)\sqrt{R(z)}}\right\}\\
&+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&+\frac{C_k}{D}\left\{D\int\frac{\sqrt{R(z_k)}\,dz}{(z-z_k)\sqrt{R(z)}} + \lambda_{1\,k}\int\frac{\sqrt{R(z_{k+1})}\,dz}{(z-z_{k+1})\sqrt{R(z)}}\right.\\
&\qquad\left. + \lambda_{2\,k}\int\frac{\sqrt{R(z_{k+2})}\,dz}{(z-z_{k+2})\sqrt{R(z)}} + \cdots + \lambda_{n-k\,k}\int\frac{\sqrt{R(z_n)}\,dz}{(z-z_n)\sqrt{R(z)}}\right\}\\
&+l^{(0)}\int\frac{z^{2p-1}dz}{\sqrt{R(z)}} + l^{(1)}\int\frac{z^{2p-2}dz}{\sqrt{R(z)}} + \cdots + l^{(p-1)}\int\frac{z^{p}dz}{\sqrt{R(z)}}\\
&+k^{(p)}\int\frac{z^{p-1}dz}{\sqrt{R(z)}} + k^{(p+1)}\int\frac{z^{p-2}dz}{\sqrt{R(z)}} + \cdots + k^{(2p-1)}\int\frac{dz}{\sqrt{R(z)}} + f(z)\sqrt{R(z)}\\
&= A_1\log\left(\frac{p_1-q_1\sqrt{R(z)}}{p_1+q_1\sqrt{R(z)}}\right) + A_2\log\left(\frac{p_2-q_2\sqrt{R(z)}}{p_2+q_2\sqrt{R(z)}}\right) + \cdots A_m\log\left(\frac{p_m-q_m\sqrt{R(z)}}{p_m+q_m\sqrt{R(z)}}\right)\\
&\qquad + q\sqrt{R(z)}
\end{aligned}
$$

über.

Bezeichnet man mit $\tau_r^{(s)}$ die Zahl, welche angiebt, wie oft die r^{te} der Gleichungen (7) die Lösung z_s enthält, so werden in Folge der Gleichheit der Coefficienten der logarithmischen Unstetigkeiten in den Punkten $z_1, z_2, \dots z_k$ auf beiden Seiten der Gleichung (10) die Beziehungen statthaben müssen:

$$\begin{aligned} C_1 &= \tau_1^{(1)} A_1 + \tau_2^{(1)} A_2 + \cdots + \tau_m^{(1)} A_m, \\ C_2 &= \tau_1^{(2)} A_1 + \tau_2^{(2)} A_2 + \cdots + \tau_m^{(2)} A_m, \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ C_k &= \tau_1^{(k)} A_1 + \tau_2^{(k)} A_2 + \cdots + \tau_m^{(k)} A_m, \end{aligned} \tag{11}$$

aus denen zuerst unmittelbar ersichtlich ist, dass $m \geqq k$ sein muss, weil sonst eine homogene lineare ganzzahlige Relation zwischen den als von einander unabhängig vorausgesetzten Grössen $C_1, C_2, \dots C_k$ sich ergeben würde. Ist aber $m \geqq k$, so können wir die Grössen

$$A_{m-k+1}, A_{m-k+2}, \dots A_m$$

homogen linear und rational durch die Grössen

$$C_1, C_2, \dots C_k, \quad A_1, A_2, \dots A_{m-k}$$

ausdrücken und die rechte Seite der Gleichung (10) würde sich in die Form bringen lassen

$$\begin{gathered} \frac{C_1}{n_1} \log\left(\frac{P_1 - Q_1\sqrt{R(z)}}{P_1 + Q_1\sqrt{R(z)}}\right) + \frac{C_2}{n_2} \log\left(\frac{P_2 - Q_2\sqrt{R(z)}}{P_2 + Q_2\sqrt{R(z)}}\right) + \cdots \\ \cdots + \frac{C_k}{n_k} \log\left(\frac{P_k - Q_k\sqrt{R(z)}}{P_k + Q_k\sqrt{R(z)}}\right) + \frac{A_1}{n_{k+1}} \log\left(\frac{P_{k+1} - Q_{k+1}\sqrt{R(z)}}{P_{k+1} + Q_{k+1}\sqrt{R(z)}}\right) + \cdots \\ \cdots + \frac{A_{m-k}}{n_m} \log\left(\frac{P_m - Q_m\sqrt{R(z)}}{P_m + Q_m\sqrt{R(z)}}\right), \end{gathered}$$

worin

$$n_1, n_2, \dots n_m$$

ganze Zahlen bedeuten. Man sieht aber, dass sich hieraus wieder durch Gleichsetzen der Coefficienten der Unstetigkeitsfunctionen in den Punkten $z_1, z_2, \dots z_k$ auf beiden Seiten der jetzt auf der rechten Seite reducirten Gleichung (10) eine Reihe von homogenen, linearen ganzzahligen Beziehungen von der Form

$$\begin{aligned} \mu_1 C_1 &= \nu_{1\,1} A_1 + \nu_{1\,2} A_2 + \cdots + \nu_{1\,m-k} A_{m-k}, \\ \mu_2 C_2 &= \nu_{2\,1} A_1 + \nu_{2\,2} A_2 + \cdots + \nu_{2\,m-k} A_{m-k}, \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \mu_k C_k &= \nu_{k\,1} A_1 + \nu_{k\,2} A_2 + \cdots + \nu_{k\,m-k} A_{m-k} \end{aligned}$$

ergeben wird, welche wiederum eine Reihe der A durch die C und die übrig bleibenden A auszudrücken erlaubt; fährt man so fort, so kann man in der hypothetisch angenommenen Gleichung allmählig alle A fortschaffen und wird schliesslich nur als Coefficienten der logarithmischen Glieder der Gleichung (10) die Grössen $C_1, C_2, \dots C_k$, mit rationalen Coefficienten versehen, übrig behalten, so dass wir — um die ganze Gleichung (10) nicht noch einmal hinzuschreiben — uns die rechte Seite in die Form gesetzt denken können:

$$(\varrho) \qquad \begin{aligned} &\varrho_1 C_1 \log\left(\frac{P^{(1)} - Q^{(1)}\sqrt{R(z)}}{P^{(1)} + Q^{(1)}\sqrt{R(z)}}\right) + \varrho_2 C_2 \log\left(\frac{P^{(2)} - Q^{(2)}\sqrt{R(z)}}{P^{(2)} + Q^{(2)}\sqrt{R(z)}}\right) + \cdots \\ &\qquad \cdots + \varrho_k C_k \log\left(\frac{P^{(k)} - Q^{(k)}\sqrt{R(z)}}{P^{(k)} + Q^{(k)}\sqrt{R(z)}}\right) + q\sqrt{R(z)}, \end{aligned}$$

worin

$$\varrho_1, \ \varrho_2, \dots \varrho_k$$

rationale Zahlen bedeuten, und die Gleichungen

$$P^{(1)^2} - Q^{(1)^2} R(z) = 0, \ P^{(2)^2} - Q^{(2)^2} R(z) = 0, \dots P^{(k)^2} - Q^{(k)^2} R(z) = 0,$$

von den Verzweigungswerthen abgesehen, nur die Werthe $z_1, z_2, \dots z_n$ zu Lösungen haben, und zwar die Gleichung

$$P^{(i)^2} - Q^{(i)^2} R(z) = 0$$

nur die Lösungen

$$z_i, \ z_{k+1}, \ z_{k+2}, \dots z_n,$$

und zwar

$$t_0^{(i)}, \ t_1^{(i)}, \ \dots t_{n-k}^{(i)}\text{-}$$

-fach.

Endlich ist aus der Gleichung (10) mit der rechten Seite (ϱ) unmittelbar zu sehen, dass

$$1 = \varrho_1 t_0^{(1)}, \quad 1 = \varrho_2 t_0^{(2)}, \ \dots 1 = \varrho_k t_0^{(k)},$$

$$\frac{\lambda_{\sigma 1}}{D} C_1 + \frac{\lambda_{\sigma 2}}{D} C_2 + \cdots + \frac{\lambda_{\sigma k}}{D} C_k = \varrho_1 t_\sigma^{(1)} C_1 + \varrho_2 t_\sigma^{(2)} C_2 + \cdots + \varrho_k t_\sigma^{(k)} C_k,$$

woraus folgt, weil eine lineare homogene rationale Beziehung zwischen den Grössen C_1, $C_2, \dots C_k$ nicht stattfinden darf, dass

$$\frac{\lambda_{\sigma\,1}}{D} = \frac{t_\sigma^{(1)}}{t_0^{(1)}}, \quad \frac{\lambda_{\sigma\,2}}{D} = \frac{t_\sigma^{(2)}}{t_0^{(2)}}, \ \dots \frac{\lambda_{\sigma\,k}}{D} = \frac{t_\sigma^{(k)}}{t_0^{(k)}},$$

sein muss.

Wir erhalten somit das folgende Resultat: wenn ein hyperelliptisches Integral auf algebraisch-logarithmische Functionen reducirbar sein soll, so muss nach Zerlegung desselben in die Integrale der drei Gattungen und den algebraischen Theil nach der oben angegebenen Methode und nach Reduction der Coefficienten der Hauptintegrale dritter Gattung auf die von einander unabhängigen, die hypothetisch vorausgesetzte Gleichung in die Form gebracht werden können:

$$
\begin{aligned}
&C_1 t_0^{(2)} t_0^{(3)} \cdots t_0^{(k)} \left\{ t_0^{(1)} \int \frac{\sqrt{R(z_1)}\,dz}{(z-z_1)\sqrt{R(z)}} + t_1^{(1)} \int \frac{\sqrt{R(z_{k+1})}\,dz}{(z-z_{k+1})\sqrt{R(z)}} + \cdots \right. \\
&\qquad\qquad \left. \cdots + t_{n-k}^{(1)} \int \frac{\sqrt{R(z_n)}\,dz}{(z-z_n)\sqrt{R(z)}} \right\} \\
&C_2 t_0^{(1)} t_0^{(3)} \cdots t_0^{(k)} \left\{ t_0^{(2)} \int \frac{\sqrt{R(z_2)}\,dz}{(z-z_2)\sqrt{R(z)}} + t_1^{(2)} \int \frac{\sqrt{R(z_{k+1})}\,dz}{(z-z_{k+1})\sqrt{R(z)}} + \cdots \right. \\
&\qquad\qquad \left. \cdots + t_{n-k}^{(2)} \int \frac{\sqrt{R(z_n)}\,dz}{(z-z_n)\sqrt{R(z)}} \right\} \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
&+C_k t_0^{(1)} t_0^{(2)} \cdots t_0^{(k-1)} \left\{ t_0^{(k)} \int \frac{\sqrt{R(z_k)}\,dz}{(z-z_k)\sqrt{R(z)}} + t_1^{(k)} \int \frac{\sqrt{R(z_{k+1})}\,dz}{(z-z_{k+1})\sqrt{R(z)}} + \cdots \right. \\
&\qquad\qquad \left. \cdots + t_{n-k}^{(k)} \int \frac{\sqrt{R(z_n)}\,dz}{(z-z_n)\sqrt{R(z)}} \right\} \\
&+t_0^{(1)} t_0^{(2)} \cdots t_0^{(k)} \left\{ \begin{array}{l} l^{(0)} \int \frac{z^{2p-1}dz}{\sqrt{R(z)}} + l^{(1)} \int \frac{z^{2p-2}dz}{\sqrt{R(z)}} + \cdots + l^{(p-1)} \int \frac{z^p dz}{\sqrt{R(z)}} \\ + k^{(p)} \int \frac{z^{p-1}dz}{\sqrt{R(z)}} + k^{(p+1)} \int \frac{z^{p-2}dz}{\sqrt{R(z)}} + \cdots + k^{(2p-1)} \int \frac{dz}{\sqrt{R(z)}} \end{array} \right\} \\
&+t_0^{(1)} t_0^{(2)} \cdots t_0^{(k)} f(z) \sqrt{R(z)} \\
&= C_1 t_0^{(2)} t_0^{(3)} \cdots t_0^{(k)} \log\left(\frac{P^{(1)} - Q^{(1)}\sqrt{R(z)}}{P^{(1)} + Q^{(1)}\sqrt{R(z)}} \right) + C_2 t_0^{(1)} t_0^{(3)} \cdots t_0^{(k)} \log\left(\frac{P^{(2)} - Q^{(2)}\sqrt{R(z)}}{P^{(2)} + Q^{(2)}\sqrt{R(z)}} \right) \\
&+ \cdots + C_k t_0^{(1)} t_0^{(2)} \cdots t_0^{(k-1)} \log\left(\frac{P^{(k)} - Q^{(k)}\sqrt{R(z)}}{P^{(k)} + Q^{(k)}\sqrt{R(z)}} \right) + t_0^{(1)} t_0^{(2)} \cdots t_0^{(k)} q \sqrt{R(z)},
\end{aligned}
\tag{12}
$$

worin die Gleichung

$$P^{(i)^2} - Q^{(i)^2} R(z) = 0,$$

von den Verzweigungswerthen abgesehen, nur die Lösungen

$$z_i,\ z_{k+1},\ z_{k+2}, \ldots z_n$$

und zwar

$$t_0^{(i)},\ t_1^{(i)},\ t_2^{(i)}, \dots t_{n-k}^{(i)}\text{-}$$

-fach hat, oder worin, wie aus dem Abel'schen Theorem für hyperelliptische Integrale hervorgeht, die Werthe $z_i,\ z_{k+1},\ z_{k+2}, \dots z_n$ bei bekannter Bestimmung der Irrationalität der Gleichung genügen

$$(13) \qquad t_0^{(i)} \int_{z_i^-}^{z_i^+} dJ^{(\varrho)}(z) + t_1^{(i)} \int_{z_{k+1}^-}^{z_{k+1}^+} dJ^{(\varrho)}(z) + \cdots + t_{n-k}^{(i)} \int_{z_n^-}^{z_n^+} dJ^{(\varrho)}(z) = 0,$$

oder

$$t_0^{(i)} \int_\alpha^{z_i} dJ^{(\varrho)}(z) + t_1^{(i)} \int_\alpha^{z_{k+1}} dJ^{(\varrho)}(z) + \cdots + t_{n-k}^{(i)} \int_\alpha^{z_n} dJ^{(\varrho)}(z) = L,$$

wenn $J^{(\varrho)}(z)$ irgend ein Integral erster Gattung, L eine Summe von halben Periodicitätsmoduln dieses Integrales und α einen Verzweigungswerth bezeichnet.

Greifen wir nunmehr eine der obigen Gleichungen

$$P^{(i)^2} - Q^{(i)^2} R(z) = 0$$

heraus, so findet nach Gleichung (41) der letzten Vorlesung die Beziehung statt:

$$(14) \qquad t_0^{(i)} \int dH(z, z_i^+, z_i^-) + t_1^{(i)} \int dH(z, z_{k+1}^+, z_{k+1}^-) + \cdots + t_{n-k}^{(i)} \int dH(z, z_n^+, z_n^-)$$
$$= \log \left(\frac{P^{(i)} - Q^{(i)} \sqrt{R(z)}}{P^{(i)} + Q^{(i)} \sqrt{R(z)}} \right),$$

worin

$$H(z, z_r^+, z_r^-)$$

ein hyperelliptisches Hauptintegral dritter Gattung bedeutet, welches im Punkte z_r auf beiden Blättern logarithmisch unendlich wird mit der positiven und negativen Einheit als Coefficienten der Unstetigkeitsfunction, und dessen sämmtliche Periodicitätsmoduln an den a-oder an den b-Querschnitten — wir wählen hier die letzteren — verschwinden.

Nun ist aber auch, wie sofort zu sehen

$$\int \frac{\sqrt{R(z_r)}\, dz}{(z - z_r)\sqrt{R(z)}}$$

ein Hauptintegral dritter Gattung, da es als Coefficienten der logarithmischen Unstetigkeiten in z_r^+ und z_r^- ebenfalls die positive und negative Einheit hat, und es wird somit nach bekannten Schlüssen

$$(15) \qquad \int dH(z, z_r^+, z_r^-) = \int \frac{\sqrt{R(z_r)}\, dz}{(z - z_r)\sqrt{R(z)}} + c_{r1}u_1 + c_{r2}u_2 + \cdots + c_{rp}u_p$$

sein, wenn $u_1, u_2, \dots u_p$ Integrale erster Gattung bedeuten, welche so beschaffen sind, dass u_k an allen b-Querschnitten den Stetigkeitssprung 0, nur am b_k-Querschnitte den Sprung 1 hat, und

$$c_{r1},\; c_{r2}, \dots c_{rp}$$

so zu bestimmen sind, dass das Hauptintegral dritter Gattung auf der linken Seite der Gleichung (15) an allen b-Querschnitten verschwindende Stetigkeitssprünge hat. Setzt man dann wie früher

$$J^{(\varrho)}(z) = \int \frac{z^\varrho dz}{\sqrt{R(z)}}, \qquad J^{(\varrho)}_{b_k}(z) = -2\int_{\alpha_{2k-1}}^{\alpha_{2k}} dJ^{(\varrho)}(z),$$

so wird u_k durch die Grössen $J^{(\varrho)}(z)$ linear in der Form ausgedrückt sein

$$u_k = d_{k\,0}J^{(0)}(z) + d_{k\,1}J^{(1)}(z) + \dots + d_{k\,p-1}J^{(p-1)}(z), \tag{16}$$

und die d müssen den Gleichungen genügen

$$\begin{array}{l} d_{k\,0}J^{(0)}_{b_1} + d_{k\,1}J^{(1)}_{b_1} + \dots + d_{k\,p-1}J^{(p-1)}_{b_1} = 0, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ d_{k\,0}J^{(0)}_{b_{k-1}} + d_{k\,1}J^{(1)}_{b_{k-1}} + \dots + d_{k\,p-1}J^{(p-1)}_{b_{k-1}} = 0, \\ d_{k\,0}J^{(0)}_{b_k} + d_{k\,1}J^{(1)}_{b_k} + \dots + d_{k\,p-1}J^{(p-1)}_{b_k} = 1, \\ d_{k\,0}J^{(0)}_{b_{k+1}} + d_{k\,1}J^{(1)}_{b_{k+1}} + \dots + d_{k\,p-1}J^{(p-1)}_{b_{k+1}} = 0, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ d_{k\,0}J^{(0)}_{b_p} + d_{k\,1}J^{(1)}_{b_p} + \dots + d_{k\,p-1}J^{(p-1)}_{b_p} = 0, \end{array} \tag{17}$$

so dass sich allgemein

$$d_{k\,\sigma} = (-1)^{k+\sigma} \begin{vmatrix} J^{(0)}_{b_1} & \cdots & J^{(\sigma-1)}_{b_1} & J^{(\sigma+1)}_{b_1} & \cdots & J^{(p-1)}_{b_1} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ J^{(0)}_{b_{k-1}} & \cdots & J^{(\sigma-1)}_{b_{k-1}} & J^{(\sigma+1)}_{b_{k-1}} & \cdots & J^{(p-1)}_{b_{k-1}} \\ J^{(0)}_{b_{k+1}} & \cdots & J^{(\sigma-1)}_{b_{k+1}} & J^{(\sigma+1)}_{b_{k+1}} & \cdots & J^{(p-1)}_{b_{k+1}} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ J^{(0)}_{b_p} & \cdots & J^{(\sigma-1)}_{b_p} & J^{(\sigma+1)}_{b_p} & \cdots & J^{(p-1)}_{b_p} \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} J^{(0)}_{b_1} & J^{(1)}_{b_1} & \cdots & J^{(p-1)}_{b_1} \\ J^{(0)}_{b_2} & J^{(1)}_{b_2} & \cdots & J^{(p-1)}_{b_2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ J^{(0)}_{b_p} & J^{(1)}_{b_p} & \cdots & J^{(p-1)}_{b_p} \end{vmatrix} \tag{18}$$

ergiebt.

Nach Bestimmung der Grössen $d_{k\sigma}$, also auch der u_k, folgen für die c die Gleichungen:

$$\int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \frac{\sqrt{R(z_r)}\,dz}{(z-z_r)\sqrt{R(z)}} + c_{r1} = 0, \quad \int_{\alpha_3}^{\alpha_4} \frac{\sqrt{R(z_r)}\,dz}{(z-z_r)\sqrt{R(z)}} + c_{r2} = 0, \ldots$$
$$\ldots \int_{\alpha_{2p-1}}^{\alpha_{2p}} \frac{\sqrt{R(z_r)}\,dz}{(z-z_r)\sqrt{R(z)}} + c_{rp} = 0,$$

so dass sich allgemein

$$c_{r\,\sigma} = -\int_{\alpha_{2\sigma-1}}^{\alpha_{2\sigma}} \frac{\sqrt{R(z_r)}\,dz}{(z-z_r)\sqrt{R(z)}} \tag{19}$$

ergiebt.

Mit Hülfe der nunmehr bestimmten Werthe der Grössen $c_{r1}, c_{r2}, \ldots c_{rp}$ geht die Gleichung (14), wenn die ursprünglichen Hauptintegrale wieder eingeführt werden, in die folgende über:

$$\begin{aligned}
&t_0^{(i)} \int \frac{\sqrt{R(z_i)}\,dz}{(z-z_i)\sqrt{R(z)}} + t_1^{(i)} \int \frac{\sqrt{R(z_{k+1})}\,dz}{(z-z_{k+1})\sqrt{R(z)}} + \cdots + t_{n-k}^{(i)} \int \frac{\sqrt{R(z_n)}\,dz}{(z-z_n)\sqrt{R(z)}} \\
&\quad + \Big\{ \Big(t_0^{(i)} c_{i\,1} + t_1^{(i)} c_{k+1\,1} + t_2^{(i)} c_{k+2\,1} + \cdots + t_{n-k}^{(i)} c_{n\,1} \Big) u_1 \\
&\quad + \quad \Big(t_0^{(i)} c_{i\,2} + t_1^{(i)} c_{k+1\,2} + t_2^{(i)} c_{k+2\,2} + \cdots + t_{n-k}^{(i)} c_{n\,2} \Big) u_2 + \cdots \\
&\quad \cdots + \quad \Big(t_0^{(i)} c_{i\,p} + t_1^{(i)} c_{k+1\,p} + t_2^{(i)} c_{k+2\,p} + \cdots + t_{n-k}^{(i)} c_{n\,p} \Big) u_p \Big\} \\
&\quad = \log \left(\frac{P^{(i)} - Q^{(i)}\sqrt{R(z)}}{P^{(i)} + Q^{(i)}\sqrt{R(z)}} \right),
\end{aligned} \tag{20}$$

und es ergiebt sich somit aus (12), wenn in (20) der Reihe nach für i die Zahlen

$$1,\ 2, \ldots\ k$$

gesetzt, die so entstehenden Gleichungen der Reihe nach mit

$$C_1 t_0^{(2)} t_0^{(3)} \ldots t_0^{(k)},\ C_2 t_0^{(1)} t_0^{(3)} \ldots t_0^{(k)},\ \ldots\ C_k t_0^{(1)} t_0^{(2)} \ldots t_0^{(k-1)}$$

multiplicirt und sämmtliche Gleichungen addirt werden, ausserdem

$$\frac{C_i}{t_0^{(i)}} \Big(t_0^{(i)} c_{i\,\varrho} + t_1^{(i)} c_{k+1\,\varrho} + t_2^{(i)} c_{k+2\,\varrho} + \cdots + t_{n-k}^{(i)} c_{n\,\varrho} \Big) = M_{i\,\varrho}$$

gesetzt wird, die weiter zu erfüllende Gleichung

$$
\begin{aligned}
&l^{(0)}\int\frac{z^{2p-1}\,dz}{\sqrt{R(z)}}+l^{(1)}\int\frac{z^{2p-2}\,dz}{\sqrt{R(z)}}+\cdots+l^{(p-1)}\int\frac{z^{p}\,dz}{\sqrt{R(z)}}\\
&+k^{(p)}\int\frac{z^{p-1}\,dz}{\sqrt{R(z)}}+k^{(p+1)}\int\frac{z^{p-2}\,dz}{\sqrt{R(z)}}+\cdots+k^{(2p-1)}\int\frac{dz}{\sqrt{R(z)}}\\
&+(M_{1\,1}+M_{2\,1}+\cdots+M_{k\,1})u_1+(M_{1\,2}+M_{2\,2}+\cdots+M_{k\,2})u_2+\cdots\\
&+(M_{1\,p}+M_{2\,p}+\cdots+M_{k\,p})u_p+f(z)\sqrt{R(z)}=q\sqrt{R(z)}.
\end{aligned}\tag{21}
$$

Benutzt man jetzt die oben aufgestellte Beziehung (16) zwischen u_k und den in der Reductionsformel des allgemeinen hyperelliptischen Integrales vorkommenden Integralen erster Gattung

$$J^{(0)}(z),\ J^{(1)}(z),\ \ldots\ J^{(p-1)}(z),$$

so wird durch Zusammenfassen der entsprechenden Integrale die Gleichung (21) in

$$
\begin{aligned}
&l^{(0)}\int\frac{z^{2p-1}\,dz}{\sqrt{R(z)}}+l^{(1)}\int\frac{z^{2p-2}\,dz}{\sqrt{R(z)}}+\cdots+l^{(p-1)}\int\frac{z^{p}\,dz}{\sqrt{R(z)}}\\
&+\big[k^{(2p-1)}+(M_{1\,1}+M_{2\,1}+\cdots+M_{k\,1})d_{1\,0}+(M_{1\,2}+M_{2\,2}+\cdots+M_{k\,2})d_{2\,0}+\cdots\\
&\qquad+(M_{1\,p}+M_{2\,p}+\cdots+M_{k\,p})d_{p\,0}\big]\int\frac{dz}{\sqrt{R(z)}}\\
&+\big[k^{(2p-2)}+(M_{1\,1}+M_{2\,1}+\cdots+M_{k\,1})d_{1\,1}+(M_{1\,2}+M_{2\,2}+\cdots+M_{k\,2})d_{2\,1}+\cdots\\
&\qquad+(M_{1\,p}+M_{2\,p}+\cdots+M_{k\,p})d_{p\,1}\big]\int\frac{z\,dz}{\sqrt{R(z)}}\\
&+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&+\big[k^{(p)}+(M_{1\,1}+M_{2\,1}+\cdots+M_{k\,1})d_{1\,p-1}+(M_{1\,2}+M_{2\,2}+\cdots+M_{k\,2})d_{2\,p-1}+\cdots\\
&\qquad+(M_{1\,p}+M_{2\,p}+\cdots+M_{k\,p})d_{p\,p-1}\big]\int\frac{z^{p-1}dz}{\sqrt{R(z)}}\\
&+f(z)\sqrt{R(z)}=q\sqrt{R(z)}
\end{aligned}\tag{22}
$$

übergehen, und somit als nothwendige und hinreichende Bedingungen für das Bestehen derselben nach dem früher ausgeführten die folgenden liefern

$$l^{(0)}=l^{(1)}=\cdots=l^{(p-1)}=0,\tag{23}$$

$$
\begin{aligned}
&k^{(2p-1)}+(M_{1\,1}+M_{2\,1}+\cdots+M_{k\,1})d_{1\,0}+\cdots+(M_{1\,p}+M_{2\,p}+\cdots+M_{k\,p})d_{p\,0}=0,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&k^{(p)}+(M_{1\,1}+M_{2\,1}+\cdots+M_{k\,1})d_{1\,p-1}+\cdots+(M_{1\,p}+M_{2\,p}+\cdots+M_{k\,p})d_{p\,p-1}=0,
\end{aligned}\tag{24}
$$

während der algebraische Werth $q\sqrt{R(z)}$ des nach Absonderung der Logarithmen dann übrig bleibenden Integrales durch die Gleichung

$$q = f(z) \tag{25}$$

bestimmt ist.

Es erübrigt nur noch die Werthe der M oder wenigstens die in den Gleichungen (24) vorkommenden Verbindungen derselben mit den d-Grössen zu ermitteln.

Geht man wieder von der oben aufgestellten Gleichung (15) aus

$$\int dH(z, z_r^+, z_r^-) = \int \frac{\sqrt{R(z_r)}\, dz}{(z - z_r)\sqrt{R(z)}} + c_{r\,1}u_1 + c_{r\,2}u_2 + \cdots + c_{r\,p}u_p,$$

worin die Grössen c durch den Ausdruck (19) definirt sind, und differentiirt diese Gleichung, so erhält man

$$\frac{dH(z, z_r^+, z_r^-)}{dz} = \frac{\sqrt{R(z_r)} dz}{(z - z_r)\sqrt{R(z)}} + c_{r\,1}\frac{du_1}{dz} + c_{r\,2}\frac{du_2}{dz} + \cdots + c_{r\,p}\frac{du_p}{dz}, \tag{26}$$

woraus sich wiederum, wenn

$$r = i,\; k+1,\; k+2,\; \ldots n$$

gesetzt, die einzelnen Gleichungen resp. mit

$$t_0^{(i)},\; t_1^{(i)} \ldots t_{n-k}^{(i)}$$

multiplicirt und sämmtlich addirt werden, nach Gleichung (14) die Beziehung ergiebt

$$\frac{d}{dz}\log\left(\frac{P^{(i)} - Q^{(i)}\sqrt{R(z)}}{P^{(i)} + Q^{(i)}\sqrt{R(z)}}\right) = \sum_{r=i,k+1,\ldots n} t_{r-k}^{(i)} \frac{\sqrt{R(z_r)}}{(z - z_r)\sqrt{R(z)}} + \frac{t_0^{(i)}}{C_i}\sum_{\varrho=1}^{p} M_{i\,\varrho}\frac{du_\varrho}{dz}, \tag{27}$$

wenn statt des Index $i-k$ der Index 0 gesetzt wird, oder mit Benutzung von (16), wenn die rationale Function

$$\frac{2R(z)\left[Q^{(i)}\dfrac{P^{(i)}}{dz} - P^{(i)}\dfrac{Q^{(i)}}{dz}\right] - P^{(i)}Q^{(i)}\dfrac{dR(z)}{dz}}{P^{(i)2} - Q^{(i)2R(z)}} = \varphi_i(z) \tag{28}$$

gesetzt, und die Gleichung (27) mit der Irrationalität $\sqrt{R(z)}$ multiplicirt wird,

$$\begin{aligned} C_i\varphi_i(z) = C_i \sum_{r=i,k+1,\ldots n} t_{r-k}^{(i)}\frac{\sqrt{R(z_r)}}{z - z_r} + t_0^{(i)}\sum_{\varrho=1}^{p} M_{i\,\varrho}d_{\varrho\,0} + t_0^{(i)}z\sum_{\varrho=1}^{p} M_{i\,\varrho}d_{\varrho\,1} + \cdots \\ \cdots + t_0^{(i)}z^{p-1}\sum_{\varrho=1}^{p} M_{i\,\varrho}d_{\varrho\,p-1}. \end{aligned} \tag{29}$$

Setzt man endlich hierin

$$i = 1,\ 2,\ \dots k$$

und addirt die so entstehenden Gleichungen, so folgt

$$\begin{aligned}
&\sum_{i=1}^{k} \frac{C_i}{t_0^{(i)}} \left[\varphi_i(z) - \sum_{r=i,k+1,\dots n} t_{r-k}^{(i)} \frac{\sqrt{R(z_r)}}{z - z_r} \right] = \\
&+(M_{1\,1} + M_{2\,1} + \cdots + M_{k\,1}) d_{1\,0} + \cdots + (M_{1\,p} + M_{2\,p} + \cdots + M_{k\,p}) d_{p\,0} \\
&+\big[(M_{1\,1} + M_{2\,1} + \cdots + M_{k\,1}) d_{1\,1} + \cdots + (M_{1\,p} + M_{2\,p} + \cdots + M_{k\,p}) d_{p\,1}\big]\, z \\
&+ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
&+\big[(M_{1\,1} + M_{2\,1} + \cdots + M_{k\,1}) d_{1\,p-1} + \cdots + (M_{1\,p} + M_{2\,p} + \cdots + M_{k\,p}) d_{p\,p-1}\big]\, z^{p-1}.
\end{aligned} \tag{30}$$

Bemerkt man nun, dass auf der linken Seite der Gleichung (30) eine in allen endlichen Werthen von z endliche Function steht, die somit, da sie eine rationale ist, eine ganze und zwar höchstens vom $p-1^{\text{ten}}$ Grade sein muss, so wird man durch Gleichsetzen der Coefficienten gleich hoher Potenzen von z unmittelbar die in den Gleichungen (24) zu den Grössen

$$k^{(2p-1)},\ k^{(2p-2)},\ \dots k^{(p)}$$

hinzuaddirten Ausdrücke in den Constanten des Problems gegeben erhalten.

Man sieht unmittelbar, dass diese Rechnung auf den von vornherein ersichtlichen Weg hinweist, die gefundenen logarithmischen Ausdrücke differentiirt mit der Function unter dem gegebenen Integrale zu vereinigen und nun das neue Integral als ein auf algebraische Functionen reducirbares zu behandeln; wir haben diesen Weg hier eingeschlagen, um die Bedingungen der Reduction in den Grössen M, also auch in den Grössen c, d. h. nach (19) in den Stetigkeitssprüngen der Hauptintegrale dritter Gattung an den b-Querschnitten ausdrücken zu können.

Es mag noch bemerkt werden, dass, wenn man die Grössen c einzeln berechnen will, die folgende leicht zu entwickelnde Beziehung das Mittel dazu liefert; setzen wir nämlich

$$\int \frac{\sqrt{R(\zeta)}\, dz}{(z-\zeta)\sqrt{R(z)}} = \Pi(z, \zeta^+, \zeta^-)$$

und den nach ζ^- genommenen Differentialquotienten dieses in ζ^+ und ζ^- logarithmisch unendlich werdenden Hauptintegrales, welcher offenbar in denselben beiden Punkten von der ersten Ordnung algebraisch unendlich wird,

$$\frac{\partial \Pi(z, \zeta^+, \zeta^-)}{d\zeta^-} = Z(z, \zeta^+, \zeta^-),$$

endlich

$$c_\sigma = -\int_{\alpha_{2\sigma-1}}^{\alpha_{2\sigma}} d\Pi(z, \zeta^+, \zeta^-) = \tfrac{1}{2}\Pi_\sigma(\zeta^+, \zeta^-),$$

worin

$$\Pi_\sigma(\zeta^+, \zeta^-),$$

den Stetigkeitssprung des Π-Integrales an dem Querschnitte b_σ bezeichnet, so ergiebt sich mit Hülfe der oben eingeführten Bezeichnungen unmittelbar aus dem Satze von der Vertauschung der Gränzen und Unstetigkeitspunkte die Gleichung

$$\int_{z_r^-}^{z_r^+} dZ(z, \zeta^+, \zeta^-)$$
$$= -\left(\frac{d\Pi(z, z_r^+, z_r^-)}{dz}\right)_{\zeta^-} - \tfrac{1}{2}\sum_{\sigma=1}^{p}\left\{\Pi_\sigma(z_r^+, z_r^-)\left(\frac{du_\sigma}{dz}\right)_{\zeta^-} + \frac{d\Pi_\sigma(\zeta^+, \zeta^-)}{d\zeta^-}\int_{z_r^-}^{z_r^+} du_\sigma\right\}$$

oder wenn die Stetigkeitssprünge des Integrales zweiter Gattung Z an den b-Querschnitten mit

$$Z_\sigma(\zeta^+, \zeta^-)$$

bezeichnet werden,

$$\int_{z_r^-}^{z_r^+} dZ(z, \zeta^+, \zeta^-) \tag{31}$$
$$= -\left(\frac{d\Pi(z, z_r^+, z_r^-)}{dz}\right)_{\zeta^-} - \tfrac{1}{2}\sum_{\sigma=1}^{p}\left\{\Pi_\sigma(z_r^+, z_r^-)\left(\frac{du}{dz}\right)_{\zeta^-} + Z_\sigma(\zeta^+, \zeta^-)\int_{z_r^-}^{z_r^+} du_\sigma\right\};$$

setzt man hierin für ζ p verschiedene Werthe ein, so erhält man die gesuchten Periodicitätsmoduln des Integrales dritter Gattung durch Integrale zweiter Gattung, zwischen den Unstetigkeitspunkten jenes Hauptintegrales genommen, durch algebraische Functionen und Periodicitätsmoduln von Integralen zweiter Gattung ausgedrückt, Relationen, welche jener bekannten Beziehung für elliptische Integrale analog sind. So würde man die oben eingeführten Grössen c direct berechnen können. Von der Gleichung (31) kommt man auch direct zur Gleichung (27), wenn man $r = i,\ k+1,\ k+2,\ \ldots n$ setzt, alle Gleichungen addirt und das Abel'sche Theorem für die hyperelliptischen Integrale erster und zweiter Gattung anwendet.

Fassen wir nunmehr all' die erhaltenen Resultate zusammen, so wird man zur Beantwortung der Frage, ob ein vorgelegtes hyperelliptisches Integral von der Form

$$\int \frac{F(z)\,dz}{\sqrt{R(z)}}$$

auf algebraisch-logarithmische Functionen reducirbar ist, folgendermassen zu verfahren haben:

Man bilde die Gleichung

$$(32) \qquad T_1\left[\frac{F(t)}{\sqrt{R(t)}}\right]_{(t-z_1)^{-1}}+T_2\left[\frac{F(t)}{\sqrt{R(t)}}\right]_{(t-z_2)^{-1}}+\cdots+T_n\left[\frac{F(t)}{\sqrt{R(t)}}\right]_{(t-z_n)^{-1}}=0$$

und suche dieselbe durch Systeme von ganzen Zahlen $T_1, T_2, \ldots T_n$ zu befriedigen; mögen sich nun $n-k$ solcher Systeme finden lassen

$$\begin{array}{llll} T_{1\,1} & T_{1\,2} & \ldots\ T_{1\,n} & , \\ T_{2\,1} & T_{2\,2} & \ldots\ T_{2\,n} & , \\ \cdots & \cdots & \cdots & , \\ T_{n-k\,1} & T_{n-k\,2} & \ldots\ T_{n-k\,n} & , \end{array}$$

welche von einander unabhängig sind, und mögen sich aus diesen $n-k$-Gleichungen (32) die Relationen ergeben

$$D\left[\frac{F(t)}{\sqrt{R(t)}}\right]_{(t-z_{k+1})^{-1}}=\lambda_{1\,1}\left[\frac{F(t)}{\sqrt{R(t)}}\right]_{(t-z_1)^{-1}}+\cdots+\lambda_{1\,k}\left[\frac{F(t)}{\sqrt{R(t)}}\right]_{(t-z_k)^{-1}}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$D\left[\frac{F(t)}{\sqrt{R(t)}}\right]_{(t-z_n)^{-1}}=\lambda_{n-k\,1}\left[\frac{F(t)}{\sqrt{R(t)}}\right]_{(t-z_1)^{-1}}+\cdots+\lambda_{n-k\,k}\left[\frac{F(t)}{\sqrt{R(t)}}\right]_{(t-z_k)^{-1}},$$

so suche man den grössten gemeinsamen Theiler zwischen den Zahlen

$$D\ \lambda_{1\,i}\ \lambda_{2\,i}\ldots\lambda_{n-k\,i},$$

worin i eine der Zahlen $1, 2, \ldots k$ bedeuten soll; sei derselbe δ_i, und werde

$$\frac{D}{\delta_i}=t_0^{(i)}, \quad \frac{\lambda_{1\,i}}{\delta_i}=t_1^{(i)}, \quad \frac{\lambda_{2\,i}}{\delta_i}=t_2^{(i)}, \ldots \frac{\lambda_{n-k\,i}}{\delta_i}=t_{n-k}^{(i)}$$

gesetzt, so ist unmittelbar zu sehen, dass

$$(\mathrm{u}) \qquad t_0^{(i)}+t_1^{(i)}+\cdots+t_{n-k}^{(i)}>p$$

sein muss, wenn eine Gleichung von der Form

$$P^{(i)^2}-Q^{(i)^2}R(z)=0;$$

von Verzweigungspunkten abgesehen, nur die Lösungen

$$z_i,\ z_{k+1},\ \ldots z_n$$

und zwar

$$t_0^{(i)},\ t_1^{(i)},\ \dots t_{n-k}^{(i)},$$

fach haben soll; denn bezeichnet man die auf die Verzweigungspunkte bezüglichen s linearen Factoren durch N, so wird $P^{(i)}$ durch N theilbar sein müssen, und es würde, wenn

$$P^{(i)} = N \cdot p^{(i)}, \quad R = N \cdot r_1, \quad Q^{(i)} = q^{(i)}$$

gesetzt wird,

$$p^{(i)^2} N - q^{(i)^2} R_1 = (z - z_i)^{t_0^{(i)}} (z - z_{k+i})^{t_1^{(i)}} \cdots (z - z_n)^{t_{n-k}^{(i)}}$$

zu erfüllen sein, woraus, da die linke Seite wegen des unpaaren Grades von $R(z)$ jedenfalls ein Polynom ist, dessen Grad die Zahl p übersteigt, folgt, dass die Ungleichheit (u) befriedigt werden muss.

Geschieht nun der obigen Ungleichheit Genüge, so setze man, wenn

$$t_0^{(i)} + t_1^{(i)} + \cdots + t_{n-k}^{(i)} \text{ durch } m_i$$

bezeichnet wird,

$$\begin{gathered}(z - z_i)^{t_0^{(i)}} (z - z_{k+i})^{t_1^{(i)}} \cdots (z - z_n)^{t_{n-k}^{(i)}} \\ = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \cdots + a_{m_i - 1} z^{m_i - 1} + z^{m_i},\end{gathered}$$

ferner, wenn

$$\beta_1,\ \beta_2,\ \dots \beta_\varkappa, \quad \gamma_1,\ \gamma_2,\ \dots \gamma_\lambda$$

die Verzweigungspunkte

$$\alpha_1,\ \alpha_2,\ \dots \alpha_{2p+1}$$

von $\sqrt{R(z)}$ in irgend welcher Reihenfolge bedeuten, so dass also

$$\varkappa + \lambda = 2p + 1$$

ist,

$$\begin{aligned}N &= c(z - \beta_1)(z - \beta_2) \cdots (z - \beta_\varkappa) = c_0 + c_1 z + c_2 z^2 + \cdots + c_\varkappa z^\varkappa \\ R_1 &= d(z - \gamma_1)(z - \gamma_2) \cdots (z - \gamma_\lambda) = d_0 + d_1 z + d_2 z^2 + \cdots + d_\lambda z^\lambda,\end{aligned}$$

und die zu bestimmenden Polynome

$$\begin{aligned}p^{(i)} &= \varrho_0 + \varrho_1 z + \varrho_2 z^2 + \cdots + \varrho_\mu z^\mu \\ q^{(i)} &= \sigma_0 + \sigma_1 z + \sigma_2 z^2 + \cdots + \sigma_\nu z^\nu,\end{aligned}$$

worin, was im allgemeinen Falle stets erlaubt ist,

$$2\mu + \varkappa = m_i, \quad 2\nu + \lambda = m_i - 1$$

gesetzt werden darf, dann werden die gegebenen z-Grössen der Gleichung

$$p^{(i)^2} N - q^{(i)^2} R_1 = 0$$

genügen müssen, also die folgende Identität

$$\begin{gathered}(\varrho_0 + \varrho_1 z + \varrho_2 z^2 + \cdots + \varrho_\mu z^\mu)^2 (c_0 + c_1 z + c_2 z^2 + \cdots + c_\varkappa z^\varkappa) \\ -(\sigma_0 + \sigma_1 z + \sigma_2 z^2 + \cdots + \sigma_\nu z^\nu)^2 (d_0 + d_1 z + d_2 z^2 + \cdots + d_\lambda z^\lambda) = \\ C(a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \cdots + a_{m_i - 1} z^{m_i - 1} + z^{m_i})\end{gathered}$$

stattfinden, wenn die oben gestellten Bedingungen erfüllt sein sollen. Man sieht aber leicht, dass, wenn man auf beiden Seiten dieser letzten Gleichung die Coefficienten von z^τ einander gleichsetzt, sich die Beziehung ergiebt

$$\begin{array}{lll} c_0(\varrho_0\varrho_\tau \quad + \varrho_1\varrho_{\tau-1} + \varrho_2\varrho_{\tau-2} + \cdots) & - d_0(\sigma_0\sigma_\tau \quad + \sigma_1\sigma_{\tau-1} + \sigma_2\sigma_{\tau-2} + \cdots) & \\ + c_1(\varrho_0\varrho_{\tau-1} + \varrho_1\varrho_{\tau-2} + \varrho_2\varrho_{\tau-3} + \cdots) & - d_1(\sigma_0\sigma_{\tau-1} + \sigma_1\sigma_{\tau-2} + \sigma_2\sigma_{\tau-3} + \cdots) & \\ + c_2(\varrho_0\varrho_{\tau-2} + \varrho_1\varrho_{\tau-3} + \varrho_2\varrho_{\tau-4} + \cdots) & - d_2(\sigma_0\sigma_{\tau-2} + \sigma_1\sigma_{\tau-3} + \sigma_2\sigma_{\tau-4} + \cdots) & \\ + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & - \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \\ + c_{\tau-2}(\varrho_0\varrho_2 + \frac{1}{2}\varrho_1\varrho_1) & - d_{\tau-2}(\sigma_0\sigma_2 + \frac{1}{2}\sigma_1\sigma_1) & \\ + c_{\tau-1}\varrho_0\varrho_1 & - d_{\tau-1}\sigma_0\sigma_1 & \\ + c_\tau \frac{1}{2}\varrho_0\varrho_0 & - d_\tau \frac{1}{2}\sigma_0\sigma_0 & = \frac{1}{2}Ca_\tau, \end{array}$$

in welcher

$$\tau = 0, 1, 2, \ldots m_i$$

zu nehmen ist, und es wird nun darauf ankommen, die Coefficienten

$$\varrho_0, \ \varrho_1, \ldots \varrho_\mu, \ \sigma_0, \ \sigma_1, \ldots \sigma_\nu$$

so zu bestimmen, dass diesen Bedingungsgleichungen Genüge geschieht; gelingt dies, so dürfen wir die oben für die Grössen

$$z_i, \ z_{k+1}, \ z_{k+2}, \ \ldots z_n$$

gestellte Forderung als erfüllt ansehen.

Die obige Gleichung in den ϱ- und σ-Grössen ist jedoch in diesen vom zweiten Grade, und wir wollen, um die Bestimmung jener Grössen zu erleichtern, noch ein anderes unmittelbar ersichtliches Verfahren angeben, welches die gesuchten Grössen aus linearen Gleichungen herzuleiten gestattet.

Man unterwerfe in einer ganzen Function $p^{(i)}$ vom

$$\frac{t_0^{(i)} + t_1^{(i)} + \cdots + t_{n-k}^{(i)} + s}{2}^{\text{ten}}$$

Grade, und in einer ganzen Function $q^{(i)}$ vom

$$\frac{t_0^{(i)} + t_1^{(i)} + \cdots + t_{n-k}^{(i)} + s}{2} - p - 1^{\text{ten}}$$

Grade, worin s so gewählt sein muss, dass diese Gradzahlen ganz und positiv sind (Null eingeschlossen), die sämmtlichen darin enthaltenen Constanten, deren Zahl

$$t_0^{(i)} + t_1^{(i)} + \cdots + t_{n-k}^{(i)} - p + 1$$

ist, der Bedingung, dass die Function

$$p^{(i)}\sqrt{N} - q^{(i)}\sqrt{R_1}$$

für $z = z_i$ selbst nebst ihren $t_0^{(i)} - 1$ ersten Ableitungen, für $z = z_{k+1}$ nebst ihren $t_1^{(i)} - 1$ ersten Ableitungen, u. s. w., endlich für $z = z_n$ nebst ihren $t_{n-k}^{(i)} - 1$ ersten Ableitungen für den einen oder den andern Werth der zugehörigen Irrationalitäten verschwindet, somit

$$t_0^{(i)} + t_1^{(i)} + \cdots + t_{n-k}^{(i)}$$

Bedingungen; erfüllen nun diese Constanten die ihre Anzahl übersteigenden Bedingungsgleichungen, so wird

$$\left(p^{(i)}\sqrt{N} - q^{(i)}\sqrt{R_1}\right)\left(p^{(i)}\sqrt{N} + q^{(i)}\sqrt{R_1}\right) = p^{(i)^2}N - q^{(i)^2}R_1$$

jedenfalls durch

$$(z - z_i)^{t_0^{(i)}}(z - z_{k+1})^{t_1^{(i)}} \cdots (z - z_n)^{t_{n-k}^{(i)}}$$

theilbar sein, und somit

$$P^{(i)^2} - Q^{(i)^2}R(z),$$

weil es vom Grade

$$t_0^{(i)} + t_1^{(i)} + \cdots + t_{n-k}^{(i)} + s$$

ist, von den in N enthaltenen Verzweigungswerthen abgesehen, nur die bezeichneten Lösungen in der angegebenen Vielfachheit besitzen.

Man kann unter der Annahme, dass die z-Grössen, welche Lösungen der Gleichung

$$p^{(i)^2} N - q^{(i)^2} R_1 = 0$$

sein sollen, sämmtlich verschieden, also

$$t_0^{(i)} = t_1^{(i)} = t_2^{(i)} = \cdots = 1$$

sind, die Bedingungsgleichungen leicht weiter reduciren. Setzt man nämlich

$$\sum t_\alpha^{(i)} = m_i, \quad \frac{m_i - s}{2} = \mu_i, \quad \frac{m_i + s}{2} - p - 1 = \nu_i$$
$$p^{(i)} = r_0 + r_1 z + r_2 z^2 + \cdots + r_{\mu_i} z^{\mu_i}$$
$$q^{(i)} = s_0 + s_1 z + s_2 z^2 + \cdots + s_{\nu_i} z^{\nu_i},$$

und nennt jene m_i in Frage kommenden z Werthe

$$\zeta_1, \ \zeta_2, \ \ldots \zeta_{m_i},$$

so werden, wenn die Grössen

$$\varepsilon_1, \ \varepsilon_2, \ \ldots \varepsilon_{m_i}$$

die positive oder negative Einheit bedeuten, nach den eben gemachten Auseinandersetzungen die Gleichungen bestehen müssen

$$\begin{aligned}
r_0 + r_1\zeta_1 + r_2\zeta_1^2 + \cdots + r_{\mu_i}\zeta_1^{\mu_i} &= \varepsilon_1 q^{(i)}(\zeta_1)\sqrt{\frac{R_1(\zeta_1)}{N(\zeta_1)}} \\
r_0 + r_1\zeta_2 + r_2\zeta_2^2 + \cdots + r_{\mu_i}\zeta_2^{\mu_i} &= \varepsilon_2 q^{(i)}(\zeta_2)\sqrt{\frac{R_1(\zeta_2)}{N(\zeta_2)}} \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
r_0 + r_1\zeta_{m_i} + r_2\zeta_{m_i}^2 + \cdots + r_{\mu_i}\zeta_{m_i}^{\mu_i} &= \varepsilon_{m_i} q^{(i)}(\zeta_{m_i})\sqrt{\frac{R_1(\zeta_{m_i})}{N(\zeta_{m_i})}}.
\end{aligned}$$

Wird nun

$$(\zeta - \zeta_1)(\zeta - \zeta_2)\cdots(\zeta - \zeta_{m_i}) = f(\zeta)$$

gesetzt, so ist bekanntlich

$$\sum_{\alpha=1}^{m_i} \frac{\zeta_\alpha^h}{f'(\zeta_\alpha)} = 0,$$

wenn

$$h \leqq m_i - 2$$

ist, und wenn man daher die oben aufgestellten m_i Gleichungen der Reihe nach mit

$$\frac{\zeta_1^k}{f'(\zeta_1)},\ \frac{\zeta_2^k}{f'(\zeta_2)},\dots\ \frac{\zeta_{m_i}^k}{f'(\zeta_{m_i})}$$

multiplicirt und addirt, worin

$$k+\mu_i \leqq m_i-2 \text{ oder } k \leqq \frac{m_i+s}{2}-2$$

genommen wird, so ergeben sich die nachfolgenden Beziehungen:

$$\begin{aligned}
&\varepsilon_1\frac{1}{f'(\zeta_1)}q^{(i)}(\zeta_1)\sqrt{\frac{R_1(\zeta_1)}{N(\zeta_1)}}+\varepsilon_2\frac{1}{f'(\zeta_2)}q^{(i)}(\zeta_2)\sqrt{\frac{R_1(\zeta_2)}{N(\zeta_2)}}+\cdots\\
&\qquad\qquad+\varepsilon_{m_i}\frac{1}{f'(\zeta_{m_i})}q^{(i)}(\zeta_{m_i})\sqrt{\frac{R_1(\zeta_{m_i})}{N(\zeta_{m_i})}}=0\\
&\varepsilon_1\frac{\zeta_1}{f'(\zeta_1)}q^{(i)}(\zeta_1)\sqrt{\frac{R_1(\zeta_1)}{N(\zeta_1)}}+\varepsilon_2\frac{\zeta_2}{f('\zeta_2)}q^{(i)}(\zeta_2)\sqrt{\frac{R_1(\zeta_2)}{N(\zeta_2)}}+\cdots\\
&\qquad\qquad+\varepsilon_{m_i}\frac{\zeta_{m_i}}{f'(\zeta_{m_i})}q^{(i)}(\zeta_{m_i})\sqrt{\frac{R_1(\zeta_{m_i})}{N(\zeta_{m_i})}}=0\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&\varepsilon_1\frac{\zeta_1^{\frac{m_i+s}{2}-2}}{f'(\zeta_1)}q^{(i)}(\zeta_1)\sqrt{\frac{R_1(\zeta_1)}{N(\zeta_1)}}+\varepsilon_2\frac{\zeta_2^{\frac{m_i+s}{2}-2}}{f'(\zeta_2)}q^{(i)}(\zeta_2)\sqrt{\frac{R_1(\zeta_2)}{N(\zeta_2)}}+\cdots\\
&\qquad\qquad+\varepsilon_{m_i}\frac{\zeta_{m_i}^{\frac{m_i+s}{2}-2}}{f'(\zeta_{m_i})}q^{(i)}(\zeta_{m_i})\sqrt{\frac{R_1(\zeta_{m_i})}{N(\zeta_{m_i})}}=0,
\end{aligned}$$

welche für die

$$\frac{m_i+s}{2}-p-1$$

Coefficientenquotienten der $q^{(i)}$-Function $\dfrac{m_i+s}{2}-1$ lineare Bestimmungsgleichungen darstellen, nach deren Elimination noch p durch die Grössen

$$\zeta_1,\ \zeta_2,\ \dots\zeta_{m_i}$$

identisch zu erfüllende Gleichungen übrig bleiben.

Man kann endlich noch in anderer Weise prüfen, ob die Werthe z_i, z_{k+1}, $\dots, z_n$ die alleinigen Lösungen von der angegebenen Vielfachheit von einer Gleichung der aufgestellten Form sein können, wenn von Verzweigungswerthen abgesehen wird, und zwar kann man sich dabei eines für elliptische Integrale bekannten Verfahrens bedienen.

Es soll zuerst gezeigt werden, dass man jedenfalls eine Gleichung von der Form

$$p'^2 N - q'^2 R_1 = 0$$

bilden kann, welche durch

$$u = (z - z_i)^{t_0^{(i)}} (z - z_{k+1})^{t_1^{(i)}} \cdots (z - z_n)^{t_{n-k}^{(i)}}$$

theilbar ist, und für welche der Grad des Quotienten $\leqq p$ ist. Bildet man nämlich eine ganze Function S des $t_0^{(i)} + t_1^{(i)} + \cdots + t_{n-k}^{(i)} - 1^{\text{ten}}$ Grades, welche die Bedingung erfüllt, dass mit Berücksichtigung der möglichen Werthe der Irrationalitäten

$$\frac{S\sqrt{N} - \sqrt{R_1}}{u}$$

für jedes endliche z endlich ist, wozu offenbar die Zahl der Constanten hinreicht, so wird

$$S^2 N - R_1$$

durch u theilbar sein, und ebenso wird, wenn

$$q' = L, \quad p' = SL - Ku$$

gesetzt wird, worin K und L noch näher bestimmt werden sollen, auch

$$p'\sqrt{N} - q'\sqrt{R_1} \text{ also auch } p'^2 N - q'^2 R_1,$$

wie durch unmittelbare Ausrechnung ersichtlich ist, durch u theilbar sein. Werde nun zur näheren Fixirung der Grössen K und L der rationale ächte Bruch $\frac{S}{u}$ in einen Kettenbruch verwandelt, und in der Reihe der dem Grade nach steigenden Zähler und Nenner der Näherungswerthe des Kettenbruches für L der Nenner L_n desjenigen Näherungswerthes gewählt, für welchen der Grad desselben kleiner ist als der Grad der Function

$$\sqrt{u\sqrt{\frac{N}{R_1}}},$$

während der Grad des Nenners des darauf folgenden Näherungswerthes schon grösser sein soll als eben diese Zahl, die der Annahme nach nicht ganz sein kann, und sei endlich K der Zähler K_n eben dieses Näherungswerthes, so ist sofort zu sehen, dass der Grad der Function

$$\frac{p'\sqrt{N} - q'\sqrt{R_1}}{\sqrt{u}} = \frac{(SL_n - K_n u)\sqrt{N} - L_n\sqrt{R_1}}{\sqrt{u}}$$

$$= \sqrt{R}\left(\frac{S - \sqrt{\frac{R_1}{N}}}{u} - \frac{K_n}{L_n}\right) L_n \sqrt{u\sqrt{\frac{N}{R_1}}},$$

wenn unter dem Grade einer Function der Exponent der Anfangspotenz in der Entwicklung derselben nach fallenden Potenzen der Variabeln verstanden wird, kleiner als der Grad der Function $\sqrt[4]{R}$ ist, da nach einem bekannten Satze

$$\frac{S}{u} - \frac{K_n}{L_n} = \frac{(-1)^n}{L_n(L_{n+1} + L_n x_{n+1})}$$

ist, worin x_{n+1} eine ächt gebrochene rationale Function bedeutet, und der Grad von

$$\frac{\sqrt{\frac{R_1}{N}}}{u} L_n \sqrt{u\sqrt{\frac{N}{R_1}}} = L_n \cdot \frac{1}{\sqrt{u\sqrt{\frac{N}{R_1}}}}$$

jedenfalls negativ ist. Ferner folgt aber auch, dass der Grad der Function

$$\frac{p'\sqrt{N} + q'\sqrt{R_1}}{\sqrt{u}},$$

da er wegen des unpaaren Grades von R derselbe sein muss, ebenfalls kleiner als der von $\sqrt[4]{R}$ ist, und es wird somit der Grad der rationalen Function

$$\frac{p'^2 N - q'^2 R_1}{u},$$

welche eine ganze ist, kleiner als der Grad von $\sqrt{R}$ also höchstens p sein. Es wird aber leicht eingesehen werden, dass dieser Grad Null sein muss, wenn vorausgesetzt wird, dass es eine Function von der Form giebt

$$p^{(i)^2} N - q^{(i)^2} R_1,$$

welche bis auf eine multiplicatorische Constante der Function u gleich ist. Denn da die Ausdrücke

$$\frac{p'\sqrt{N} - q'\sqrt{R_1}}{p'\sqrt{N} + q'\sqrt{R_1}} \text{ und } \frac{p^{(i)}\sqrt{N} - q^{(i)}\sqrt{R_1}}{p^{(i)}\sqrt{N} + q^{(i)}\sqrt{R_1}}$$

mit entsprechenden Zeichen der Irrationalitäten genommen für alle Lösungen von $u = 0$ in derselben Weise Null und unendlich werden, so wird ihr Quotient

$$\frac{p'\sqrt{N} - q'\sqrt{R_1}}{p'\sqrt{N} + q'\sqrt{R_1}} \cdot \frac{p^{(i)}\sqrt{N} + q^{(i)}\sqrt{R_1}}{p^{(i)}\sqrt{N} - q^{(i)}\sqrt{R_1}} = \frac{\pi + k\sqrt{R}}{\pi - k\sqrt{R}}$$

nur noch für alle die Lösungen des Polynoms

$$\frac{p'^2 N - q'^2 R_1}{u}$$

Null und unendlich sein können, und daher

$$\pi^2 - k^2 R$$

von einem Grade sein müssen, der nicht grösser als p ist, wenn die Verzweigungspunkte abgesondert sind, was offenbar unmöglich ist. Es folgt daraus, dass das oben gefundene Polynom

$$(\alpha) \qquad p'^2 N - q'^2 R_1$$

von einer Constanten abgesehen mit u zusammenfällt, und dass man somit, wenn nach der oben angegebenen Methode die Grössen p' und q' durch K_n und L_n ausgedrückt gebildet werden, das Polynom (α) vom

$$t_0^{(i)} + t_1^{(i)} + \cdots + t_{n-k}^{(i)}$$

ten Grade sein muss, wenn der ursprünglich gestellten Bedingung überhaupt soll Genüge geleistet werden.

Lassen sich nun für alle oben aufgestellten z-Verbindungen Gleichungen von der Form

$$P^{(1)^2} - Q^{(1)^2} R(z) = 0, \quad P^{(2)^2} - Q^{(2)^2} R(z) = 0, \ldots P^{(k)^2} - Q^{(k)^2} R(z) = 0,$$

finden, welche ausser den resp. Werthen

$$\begin{gathered} z_1,\, z_{k+1},\, \ldots z_n, \\ z_2,\, z_{k+1},\, \ldots z_n, \\ \cdots\cdots\cdots \\ z_k,\, z_{k+1},\, \ldots z_n \end{gathered}$$

mit der entsprechenden Vielfachheit

$$\begin{gathered} t_0^{(1)},\, t_1^{(1)},\, \ldots t_{n-k}^{(1)} \\ t_0^{(2)},\, t_1^{(2)},\, \ldots t_{n-k}^{(2)} \\ \cdots\cdots\cdots \\ t_0^{(k)},\, t_1^{(k)},\, \ldots t_{n-k}^{(k)} \end{gathered}$$

nur noch Verzweigungswerthe zu Lösungen haben, so bilde man die Summe

$$(33)\quad \frac{1}{t_0^{(1)}}\left[\frac{F(t)}{\sqrt{R(t)}}\right]_{(t-z_1)^{-1}} \log\left(\frac{P^{(1)}-Q^{(1)}\sqrt{R(z)}}{P^{(1)}+Q^{(1)}\sqrt{R(z)}}\right) + \frac{1}{t_0^{(2)}}\left[\frac{F(t)}{\sqrt{R(t)}}\right]_{(t-z_2)^{-1}} \log\left(\frac{P^{(2)}-Q^{(2)}\sqrt{R(z)}}{P^{(2)}+Q^{(2)}\sqrt{R(z)}}\right)$$
$$+\cdots+\frac{1}{t_0^{(k)}}\left[\frac{F(t)}{\sqrt{R(t)}}\right]_{(t-z_k)^{-1}} \log\left(\frac{P^{(k)}-Q^{(k)}\sqrt{R(z)}}{P^{(k)}+Q^{(k)}\sqrt{R(z)}}\right) = L(z),$$

dann wird $L(z)$ das Aggregat der im reducirbaren hyperelliptischen Integrale vorkommenden logarithmischen Glieder darstellen. Setzt man sodann

$$\frac{dL(z)}{dz} = \sum_{i=1}^{k}\left\{\frac{1}{t_0^{(i)}}\left[\frac{F(t)}{\sqrt{R(t)}}\right]_{(t-z_i)^{-1}} \frac{2R(z)\left[Q^{(i)}\frac{dP^{(i)}(z)}{dz} - P^{(i)}\frac{dQ^{(i)}(z)}{dz}\right] - P^{(i)}Q^{(i)}\frac{dR(z)}{dz}}{P^{(i)2}-Q^{(i)2}R(z)} \cdot \frac{1}{\sqrt{R(t)}}\right\}$$
$$= \frac{\varphi(z)}{\sqrt{R(t)}},$$

so müssen ferner mit Zugrundelegung der früher eingeführten Bezeichnungen noch die Bedingungen befriedigt sein

$$\sum_{\alpha=1}^{n}\left[\frac{F(t)}{\sqrt{R(t)}}\int_{z_\alpha}\frac{F_r(t)dt}{\sqrt{R(t)}}\right]_{(t-z_\alpha)^{-1}} - \left[\frac{F(t)}{\sqrt{R(t)}}\int_{\infty}\frac{F_r(t)dt}{\sqrt{R(t)}}\right]_{t^{-1}} = 0$$

für die Werthe $r = 0,\ 1,\ 2, \ldots p-1$, und

$$\sum_{\alpha=1}^{n}\left[\frac{F(t)-\varphi(t)}{\sqrt{R(t)}}\int_{z_\alpha}\frac{F_r(t)dt}{\sqrt{R(t)}}\right]_{(t-z_\alpha)^{-1}} - \left[\frac{F(t)-\varphi(t)}{\sqrt{R(t)}}\int_{\infty}\frac{F_r(t)dt}{\sqrt{R(t)}}\right]_{t^{-1}} = 0$$

für die Werthe $r = p,\ p+1, \ldots 2p-1$; sind alle diese Bedingungen erfüllt, so ist der Werth des algebraischen Theiles jenes hyperelliptischen Integrales

$$\left\{\sum_{\alpha=1}^{n}\left[\frac{F(t)}{\sqrt{R(t)}}\int_{z_\alpha}\frac{dt}{(t-z)\sqrt{R(t)}}\right]_{(t-z_\alpha)^{-1}} - \left[\frac{F(t)}{\sqrt{R(t)}}\int_{\infty}\frac{dt}{(t-z)\sqrt{R(t)}}\right]_{t^{-1}}\right\}\sqrt{R(z)},$$

welcher mit $L(z)$ vereinigt die algebraisch-logarithmische Darstellung des gegebenen Integrales liefert.

Neunte Vorlesung.

Die Multiplication und Division der hyperelliptischen Integrale.

Das in der sechsten Vorlesung behandelte Abel'sche Theorem führt unmittelbar zur Aufstellung des Multiplications- und Divisionstheorems der hyperelliptischen Integrale.

Sei n eine ganze positive Zahl, so lässt sich der Ausdruck

$$n\int^{x_1}\frac{f(x)\,dx}{\sqrt{R(x)}}+n\int^{x_2}\frac{f(x)\,dx}{\sqrt{R(x)}}+\cdots+n\int^{x_p}\frac{f(x)\,dx}{\sqrt{R(x)}},$$

worin $f(x)$ eine mit beliebigen Coefficienten versehene ganze Function $p-1^{\text{ten}}$ Grades, $R(x)$ ein Polynom $2p+1^{\text{ten}}$ Grades ist, nach dem Additionstheorem in eine Summe von p anderen gleichartigen Integralen verwandeln, so dass

$$\begin{aligned}(1)\qquad & n\int^{x_1}\frac{f(x)\,dx}{\sqrt{R(x)}}+n\int^{x_2}\frac{f(x)\,dx}{\sqrt{R(x)}}+\cdots+n\int^{x_p}\frac{f(x)\,dx}{\sqrt{R(x)}}\\ &=\int^{\xi_1}\frac{f(x)\,dx}{\sqrt{R(x)}}+\int^{\xi_2}\frac{f(x)\,dx}{\sqrt{R(x)}}+\cdots+\int^{\xi_p}\frac{f(x)\,dx}{\sqrt{R(x)}}\end{aligned}$$

wird, worin die Grössen

$$\xi_1,\ \xi_2,\ \ldots\xi_p$$

Lösungen einer Gleichung p^{ten} Grades

$$(2)\qquad \xi^p+P_1\xi^{p-1}+\cdots+P_{p-1}\xi+P_p=0$$

sind, deren Coefficienten rational aus den Grössen

$$(\text{a})\qquad x_1,\ x_2,\ \ldots x_p,\sqrt{R(x_1)},\ \sqrt{R(x_2)},\ \ldots\sqrt{R(x_p)}$$

zusammengesetzte und in Bezug auf die Werthepaare

$$x_\alpha,\ \sqrt{R(x_\alpha)}$$

symmetrische Functionen vorstellen, während die zu den ξ-Grössen gehörigen Irrationalitäten, wie bekannt, rational aus den resp. ξ und den Grössen (a) gebildet sind und in die Form gesetzt werden mögen

$$(3)\qquad \sqrt{R(\xi_\alpha)}=F\Big(\xi_\alpha,x_1,x_2,\ldots x_p,\sqrt{R(x_1)},\sqrt{R(x_2)},\ldots\sqrt{R(x_p)}\Big).$$

In Betreff der Gleichung (2) lässt sich im Allgemeinen nur ähnliches aussagen, wie das in der siebenten Vorlesung über die Form der allgemeinen algebraischen Transformationsgleichung hervorgehobene.

Wenn p grade oder n ungrade ist, setze man

$$p(n+1) = 2m,$$

und indem man dann den Ausdruck

$$p(x) - q(x)\sqrt{R(x)},$$

in welchem $p(x)$ vom m^{ten}, $q(x)$ vom $m-p-1^{\text{ten}}$ Grade ist, nur der Bedingung zu unterwerfen hat, dass derselbe mit seinen $n-1$ ersten Ableitungen für die Werthe

$$x_1,\ x_2,\ \ldots x_p$$

verschwindet, sieht man unmittelbar, dass sich zur Bestimmung der Coefficienten von $p(x)$ und $q(x)$ ein System linearer Gleichungen ergeben wird, in welchem die Coefficienten von $p(x)$ mit rationalen Functionen je einer der Variabeln $x_1,\ x_2,\ \ldots x_p$, die Coefficienten von $q(x)$ dagegen mit einem Producte ebensolcher Functionen in die resp. Irrationalitäten

$$\sqrt{R(x_1)},\ \sqrt{R(x_2)},\ \ldots\sqrt{R(x_p)}$$

multiplicirt sind; ist dagegen $p(n+1)$ eine ungrade Zahl, so wird man bekanntlich, wenn α eine Lösung der Gleichung $R(x) = 0$ ist, nur in derselben Weise für den Ausdruck

$$(x-\alpha)P(x) - Q(x)\sqrt{R(x)}$$

zu verfahren brauchen und zu denselben Eigenschaften der Coefficienten der einzelnen Functionen gelangen.

Wir können jedoch dieses Theorem von der *Multiplication der hyperelliptischen Integrale* noch anders auffassen.

Stellt man sich nämlich die Aufgabe, den Ausdruck

$$n\int^{x_1} \frac{f(x)\,dx}{\sqrt{R(x)}}$$

in eine Summe von p gleichartigen Integralen der Form

$$\int^{\xi_1} \frac{f(x)\,dx}{\sqrt{R(x)}} + \int^{\xi_2} \frac{f(x)\,dx}{\sqrt{R(x)}} + \cdots + \int^{\xi_p} \frac{f(x)\,dx}{\sqrt{R(x)}}$$

zu verwandeln, so wird man, wenn

$$n+\varrho+p=2m \quad (\text{wo } n+\varrho>p \text{ zu wählen})$$
$$(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\cdots(x-\alpha_\varrho)=R_1(x)$$
$$(x-\alpha_{\varrho+1})(x-\alpha_{\varrho+2})\cdots(x-\alpha_{2p+1})=R_2(x)$$

gesetzt wird, nur den Ausdruck

$$\text{(b)} \qquad \sqrt{R_1(x)}P(x)-\sqrt{R_2(x)}Q(x),$$

in welchem $P(x)$ vom $m-\varrho^{\text{ten}}$, $Q(x)$ vom $m-p-1^{\text{ten}}$ Grade ist, derart zu bestimmen haben, dass derselbe mit seinen $n-1$ ersten Ableitungen für

$$x=x_1 \text{ und } \sqrt{R(x)}=\sqrt{R(x_1)}$$

verschwindet, und es ist unmittelbar ersichtlich, dass, weil der Werth von $\sqrt{R(x_1)}$ gegeben ist, auch die Werthe von $\sqrt{R_1(x_1)}$ und $\sqrt{R_2(x_1)}$ in den aus (b) durch successives Differentiiren hervorgehenden in eben diesen Wurzelgrössen linearen homogenen Gleichungen als gegeben zu betrachten sind, so dass, wenn

$$P(x)=a_{m-\varrho}\quad x^{m-\varrho}\quad +a_{m-\varrho-1}x^{m-\varrho-1}+\cdots+a_0$$
$$Q(x)=b_{m-p-1}\,x^{m-p-1}+b_{m-p-2}x^{m-p-2}+\cdots+b_0$$

gesetzt wird, die Bestimmungsgleichungen für die Coefficienten dieser Functionen sämmtlich die Form haben

$$\big(a_{m-\varrho}f_{m-\varrho}(x_1)+a_{m-\varrho-1}f_{m-\varrho-1}(x_1)+\cdots\big)\sqrt{R_1(x_1)}$$
$$+\big(b_{m-p-1}F_{m-p-1}(x_1)+b_{m-p-2}F_{m-p-2}(x_1)+\cdots\big)\sqrt{R_2(x_1)}=0$$

wobei in den einzelnen Gleichungen die Functionen f und F rationale Functionen von x_1 bedeuten.

Daraus folgt aber unmittelbar, dass die Grössen a Producten von rationalen Functionen von x_1 in die Irrationalität $\sqrt{R_1(x_1)}$ proportional sind, während sich die Grössen b wie die Producte ebensolcher Functionen in $\sqrt{R_2(x_1)}$ verhalten, und wir schliessen somit aus der Identität

$$R_1(x_1)P(x_1)^2-R_2(x_1)Q(x_1)^2=(x-x_1)^n(x-\xi_1)(x-\xi_2)\cdots(x-\xi_p),$$

dass *die Coefficienten der Gleichung*

$$(x-\xi_1)(x-\xi_2)\cdots(x-\xi_p)=0$$

oder die rationalen symmetrischen Functionen der Gränzen der Integrale der rechten Seite der Gleichung

$$(4) \qquad n\int^{x_1} \frac{f(x)\,dx}{\sqrt{R(x)}} = \int^{\xi_1} \frac{f(x)\,dx}{\sqrt{R(x)}} + \int^{\xi_2} \frac{f(x)\,dx}{\sqrt{R(x)}} + \cdots + \int^{\xi_p} \frac{f(x)\,dx}{\sqrt{R(x)}}$$

rationale Functionen von x_1 sind, während die zugehörigen Irrationalitäten, wie unmittelbar zu sehen, *sich als Producte von $\sqrt{R(x_1)}$ in Functionen darstellen, welche rational aus x_1 und den zugehörigen ξ-Werthen zusammengesetzt sind.*

Ich gehe jetzt zur Behandlung des umgekehrten Problems, *des Divisionsproblems der hyperelliptischen Integrale* über.

Aus der Gleichung (1) folgt

$$(5) \qquad \int^{x_1} \frac{f(x)\,dx}{\sqrt{R(x)}} + \cdots + \int^{x_p} \frac{f(x)\,dx}{\sqrt{R(x)}} = \frac{1}{n}\int^{\xi_1} \frac{f(x)\,dx}{\sqrt{R(x)}} + \cdots + \frac{1}{n}\int^{\xi_p} \frac{f(x)\,dx}{\sqrt{R(x)}},$$

worin wir uns jetzt die Grössen

$$\xi_1, \xi_2, \ldots \xi_p, \sqrt{R(\xi_1)}, \sqrt{R(\xi_2)}, \ldots \sqrt{R(\xi_p)}$$

gegeben denken, und es wird die Aufgabe gestellt, die Grössen

$$x_1, x_2, \ldots x_p, \sqrt{R(x_1)}, \sqrt{R(x_2)}, \ldots \sqrt{R(x_p)}$$

zu ermitteln, oder auch aus dem durch die Gleichung (2) bestimmten Gleichungssystem

$$(6) \qquad \begin{aligned} &\xi_1^p + P_1\xi_1^{p-1} + \cdots + P_p = 0 \\ &\xi_2^p + P_1\xi_2^{p-1} + \cdots + P_p = 0 \\ &\quad \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ &\xi_p^p + P_1\xi_p^{p-1} + \cdots + P_p = 0 \end{aligned}$$

die Werthe von $x_1,\ x_2,\ \ldots x_p$ als Functionen der ξ und der dazugehörigen Irrationalitäten auszudrücken.

Bezeichnen wir die $2p$ Periodicitätsmoduln des Integrales

$$\int \frac{f(x)\,dx}{\sqrt{R(x)}}$$

an den früher definirten Querschnitten a_k und b_k mit

$$J_{a_k} \text{ und } J_{b_k},$$

so ist leicht zu sehen, dass, wenn man zur linken Seite der Gleichung (5) eine Summe von Integralen der Form

$$\frac{m_1}{n} J_{a_1} + \frac{m_2}{n} J_{a_2} + \cdots + \frac{m_p}{n} J_{a_p} + \frac{m_{p+1}}{n} J_{b_1} + \frac{m_{p+2}}{n} J_{b_2} + \cdots + \frac{m_{2p}}{n} J_{b_p}$$

hinzuaddirt, in welchen

$$m_1, m_2, \ldots m_p, m_{p+1}, m_{p+2}, \ldots m_{2p}$$

beliebige positive ganze Zahlen von 0 bis $n-1$ bedeuten sollen, und man sich ferner p Integrale mit den oberen Gränzen $\eta_1, \eta_2, \ldots \eta_p$ aufgestellt denkt, die der Gleichung Genüge leisten

$$\begin{aligned} &m_1 J_{a_1} + m_2 J_{a_2} + \cdots + m_p J_{a_p} + m_{p+1} J_{b_1} + m_{p+2} J_{b_2} + \cdots + m_{2p} J_{b_p} \\ &\qquad = n \int^{\eta_1} \frac{f(x)\,dx}{\sqrt{R(x)}} + n \int^{\eta_2} \frac{f(x)\,dx}{\sqrt{R(x)}} + \cdots + n \int^{\eta_p} \frac{f(x)\,dx}{\sqrt{R(x)}}, \end{aligned} \tag{7}$$

sich jedenfalls die so entstehende linke Seite der Gleichung (5) wieder in die Summe von p gleichartigen Integralen wird zusammenfassen lassen, welche wir mit

$$\int^{x'_1} \frac{f(x)\,dx}{\sqrt{R(x)}} + \int^{x'_2} \frac{f(x)\,dx}{\sqrt{R(x)}} + \cdots + \int^{x'_p} \frac{f(x)\,dx}{\sqrt{R(x)}}$$

bezeichnen wollen, und wenn wir diese Summe wieder mit n multipliciren und nach dem Abel'schen Theorem die Gleichung bilden

$$n \int^{x'_1} \frac{f(x)\,dx}{\sqrt{R(x)}} + \cdots + n \int^{x'_p} \frac{f(x)\,dx}{\sqrt{R(x)}} = \int^{\xi'_1} \frac{f(x)\,dx}{\sqrt{R(x)}} + \cdots + \int^{\xi'_p} \frac{f(x)\,dx}{\sqrt{R(x)}},$$

so folgt unmittelbar, dass, weil

$$\begin{aligned} &n \int^{x'_1} \frac{f(x)\,dx}{\sqrt{R(x)}} + n \int^{x'_2} \frac{f(x)\,dx}{\sqrt{R(x)}} + \cdots + n \int^{x'_p} \frac{f(x)\,dx}{\sqrt{R(x)}} \\ =&n \int^{x_1} \frac{f(x)\,dx}{\sqrt{R(x)}} + n \int^{x_2} \frac{f(x)\,dx}{\sqrt{R(x)}} + \cdots + n \int^{x_p} \frac{f(x)\,dx}{\sqrt{R(x)}} \\ +&n \int^{\eta_1} \frac{f(x)\,dx}{\sqrt{R(x)}} + n \int^{\eta_2} \frac{f(x)\,dx}{\sqrt{R(x)}} + \cdots + n \int^{\eta_p} \frac{f(x)\,dx}{\sqrt{R(x)}} \\ =&n \int^{x_1} \frac{f(x)\,dx}{\sqrt{R(x)}} + \cdots + n \int^{x_p} \frac{f(x)\,dx}{\sqrt{R(x)}} + m_1 J_{a_1} + \cdots + m_p J_{a_p} \\ &\qquad\qquad + m_{p+1} J_{b_1} + \cdots + m_{2p} J_{b_p} \end{aligned}$$

ist, auch

$$\int^{\xi_1'} \frac{f(x)\,dx}{\sqrt{R(x)}} + \cdots + \int^{\xi_p'} \frac{f(x)\,dx}{\sqrt{R(x)}} = \int^{\xi_1} \frac{f(x)\,dx}{\sqrt{R(x)}} + \cdots + \int^{\xi_p} \frac{f(x)\,dx}{\sqrt{R(x)}}$$
$$+ m_1 J_{a_1} + \cdots + m_p J_{a_p} + m_{p+1} J_{b_1} + \cdots + m_{2p} J_{b_p}$$

sein wird, d. h. es unterscheiden sich die einen Integrale von den andern nur um ganze Vielfache der Periodicitätsmoduln, oder es werden die Integrationswege dieser Integrale verschieden sein, während die oberen Gränzen dieselben bleiben.

Wir erhalten somit das Resultat, dass die Werthe x_1', x_2', $\dots x_p'$ ebenfalls dem obigen Gleichungssystem (6) genügen, in welchem die Werthe ξ_1, ξ_2, $\dots \xi_p$ dieselben bleiben. Da nun die Grössen m_1, m_2, $\dots m_{2p}$ alle Werthe von 0 bis $n-1$ annehmen sollen, so werden wir

$$n^{2p} = \sigma$$

Combinationen von durch n getheilten Perioden erhalten und somit auch n^{2p} Werthesysteme der Grössen x, welche sämmtlich dem Gleichungssysteme (6) genügen, und die wir durch

$$\text{(c)} \qquad \begin{matrix} x_1^{(0)} & x_2^{(0)} & \dots x_p^{(0)} \\ x_1^{(1)} & x_2^{(1)} & \dots x_p^{(1)} \\ \cdot & \cdot \; \cdot \; \cdot & \cdot \; \cdot \; \cdot \\ x_1^{(\sigma-1)} & x_2^{(\sigma-1)} & \dots x_p^{(\sigma-1)} \end{matrix}$$

bezeichnen wollen, worin die früheren

$$x_1, x_2, \dots x_p \text{ durch } x_1^{(0)} x_2^{(0)} \dots x_p^{(0)}$$

dargestellt sein sollen.

Aber man kann auch das Gleichungssystem (6), welches ausser den Grössen x_1, x_2, $\dots x_p$ noch die zu diesen Grössen gehörigen Irrationalitäten

$$\text{(d)} \qquad \sqrt{R(x_1)}, \sqrt{R(x_2)}, \dots \sqrt{R(x_p)}$$

enthält, so umformen, dass es von eben diesen Irrationalitäten frei ist, dass aber dafür die zu den Werthen ξ_1, ξ_2, $\dots \xi_p$ gehörigen Irrationalitäten

$$\text{(e)} \qquad \sqrt{R(\xi_1)}, \sqrt{R(\xi_2)}, \dots \sqrt{R(\xi_p)},$$

eintreten; denn da nach Gleichung (3), wenn in dieselbe der Reihe nach

$$\alpha = 1, 2, \dots p$$

gesetzt wird, sich p Gleichungen ergeben, aus denen sich die Grössen (d) offenbar als rationale Functionen der andern darin vorkommenden Grössen berechnen lassen, so werden wir ein System von Gleichungen von der Form erhalten,

$$(8)\qquad \begin{aligned} &F_1\big(x_1, \dots x_p, \xi_1, \dots \xi_p, \sqrt{R(\xi_1)}, \dots \sqrt{R(\xi_p)}\,\big) = 0 \\ &F_2\big(x_1, \dots x_p, \xi_1, \dots \xi_p, \sqrt{R(\xi_1)}, \dots \sqrt{R(\xi_p)}\,\big) = 0 \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ &F_p\big(x_1, \dots x_p, \xi_1, \dots \xi_p, \sqrt{R(\xi_1)}, \dots \sqrt{R(\xi_p)}\,\big) = 0 \end{aligned}$$

das ebenfalls mit Beibehaltung der Werthe

$$\xi_1, \dots \xi_p, \sqrt{R(\xi_1)}, \dots \sqrt{R(\xi_p)}$$

durch das Werthesystem (c) befriedigt wird; ebenso leicht ist einzusehen, dass das Gleichungssystem (8) andere gemeinsame Lösungscombinationen als die eben bezeichneten σ nicht besitzen kann, da das n-fache Multiplum der zugehörigen Integrale auf die Summe derselben p Integrale mit den Gränzen ξ_1, $\xi_2, \dots \xi_p$ führen müsste.

Bezeichnen wir jetzt durch

$$\psi\big(x_1^{(\alpha)}, x_2^{(\alpha)}, \dots x_p^{(\alpha)}\big)$$

irgend eine ganze symmetrische Function der Grössen

$$x_1^{(\alpha)}, x_2^{(\alpha)}, \dots x_p^{(\alpha)},$$

in welchen α eine der Zahlen $0, 1, 2, \dots \sigma - 1$ bedeuten soll, und denen das Werthesystem

$$m_1^{(\alpha)}, m_2^{(\alpha)}, \dots m_p^{(\alpha)}, m_{p+1}^{(\alpha)}, \dots m_{2p}^{(\alpha)}$$

entsprechen mag, werden ferner $2p$ Lösungen der Gleichung

$$\vartheta^n = 1$$

mit

$$\vartheta_1, \vartheta_2, \dots \vartheta_{2p}$$

bezeichnet, und der Ausdruck

$$\vartheta_1^{m_1^{(\alpha)}} \vartheta_2^{m_2^{(\alpha)}} \cdots \vartheta_{2p}^{m_{2p}^{(\alpha)}}\, \varphi\big(x_1^{(\alpha)}, x_2^{(\alpha)}, \dots x_p^{(\alpha)}\big)$$

gebildet, so soll die charakteristische Eigenschaft der Summe

$$\sum_{\alpha=0}^{\sigma-1} \vartheta_1^{m_1^{(\alpha)}} \vartheta_2^{m_2^{(\alpha)}} \cdots \vartheta_{2p}^{m_{2p}^{(\alpha)}} \varphi\big(x_1^{(\alpha)}, x_2^{(\alpha)}, \dots x_p^{(\alpha)}\big) = \psi\big(x^{(0)}, x^{(1)}, \dots x^{(\sigma-1)}\big)$$

gefunden werden, worin

$$\psi\big(x^{(0)}, x^{(1)}, \dots x^{(\sigma-1)}\big)$$

eine von allen x des Systemes (c) abhängige ganze Function bedeutet.

Vor Allem ist leicht einzusehen, dass die ψ-Function als rationale Function der Grössen

$$x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \dots x_p^{(0)}$$

dargestellt werden kann. Aus der Beziehung

$$\begin{aligned} &\int^{x_1^{(\alpha)}} \frac{f(x)\,dx}{\sqrt{R(x)}} + \int^{x_2^{(\alpha)}} \frac{f(x)\,dx}{\sqrt{R(x)}} + \cdots + \int^{x_p^{(\alpha)}} \frac{f(x)\,dx}{\sqrt{R(x)}} \\ = &\int^{x_1^{(0)}} \frac{f(x)\,dx}{\sqrt{R(x)}} + \int^{x_2^{(0)}} \frac{f(x)\,dx}{\sqrt{R(x)}} + \cdots + \int^{x_p^{(0)}} \frac{f(x)\,dx}{\sqrt{R(x)}} \\ + &\frac{m_1^{(\alpha)}}{n} J_{a_1} + \cdots + \frac{m_p^{(\alpha)}}{n} J_{a_p} + \frac{m_{p+1}^{(\alpha)}}{n} J_{b_1} + \cdots + \frac{m_{2p}^{(\alpha)}}{n} J_{b_p} \\ = &\int^{x_1^{(0)}} \frac{f(x)\,dx}{\sqrt{R(x)}} + \cdots + \int^{x_p^{(0)}} \frac{f(x)\,dx}{\sqrt{R(x)}} + \int^{\eta_1^{(\alpha)}} \frac{f(x)\,dx}{\sqrt{R(x)}} + \cdots + \int^{\eta_p^{(\alpha)}} \frac{f(x)\,dx}{\sqrt{R(x)}} \end{aligned}$$

folgt nämlich nach dem Abel'schen Theorem, dass

$$x_1^{(\alpha)}, x_2^{(\alpha)}, \dots x_p^{(\alpha)}$$

die Lösungen einer Gleichung p^{ten} Grades sind, deren Coefficienten rational aus

$$\begin{gathered} x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \dots x_p^{(0)} \sqrt{R\big(x_1^{(0)}\big)}, \sqrt{R\big(x_2^{(0)}\big)}, \dots \sqrt{R\big(x_p^{(0)}\big)}, \\ \eta_1^{(\alpha)}, \eta_2^{(\alpha)}, \dots \eta_p^{(\alpha)} \sqrt{R\big(\eta_1^{(\alpha)}\big)}, \sqrt{R\big(\eta_2^{(\alpha)}\big)}, \dots \sqrt{R\big(\eta_p^{(\alpha)}\big)}, \end{gathered}$$

zusammengesetzt sind, oder auch, wie unmittelbar ans der oben gemachten Auseinandersetzung zu erkennen, von den η-Grössen und den zu diesen gehörigen Irrationalitäten abgesehen, rationale Functionen der Grössen

$$\text{(f)} \qquad x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \dots x_p^{(0)}, \xi_1, \xi_2, \dots \xi_p, \sqrt{R(\xi_1)}, \sqrt{R(\xi_2)}, \dots \sqrt{R(\xi_p)},$$

sind; daher wird die symmetrische Function

$$\varphi\big(x_1^{(\alpha)}, x_2^{(\alpha)}, \dots x_p^{(\alpha)}\big)$$

der in dieser enthaltenen Grössen sich rational durch eben diese Grössen (f) ausdrücken lassen, und dasselbe gilt von der Function

$$\psi\big(x^{(0)}, x^{(1)}, \dots x^{(\sigma-1)}\big)$$

die als rationale Function der Grössen (f) durch

$$\psi\big(x^{(0)}, x^{(1)}, \dots x^{(\sigma-1)}\big) = \Psi\big(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \dots x_p^{(0)}\big)$$

bezeichnet werden möge.

Es tritt jetzt die Frage auf, was aus der Function Ψ wird, wenn an Stelle der Grössen $x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \dots x_p^{(0)}$ eine andere Werthecombination

$$x_1^{(r)}, x_2^{(r)}, \dots x_p^{(r)}$$

gesetzt wird; man sieht leicht, dass

$$\begin{aligned}(9) \qquad \Psi\big(x_1^{(r)}, x_2^{(r)}, \dots x_p^{(r)}\big) &= \psi\big(x^{(r)}, x^{(r+1)}, \dots x^{(r+\sigma-1)}\big) \\ &= \sum_{\alpha=0}^{\sigma-1} \vartheta_1^{m_1^{(\alpha)}} \vartheta_2^{m_2^{(\alpha)}} \cdots \vartheta_{2p}^{m_{2p}^{(\alpha)}} \varphi\big(x_1^{(\alpha+r)}, x_2^{(\alpha+r)}, \dots x_p^{(\alpha+r)}\big) \\ &= \vartheta_1^{-m_1^{(r)}} \vartheta_2^{-m_2^{(r)}} \cdots \vartheta_{2p}^{-m_{2p}^{(r)}} \times \\ &\sum_{\alpha=0}^{\sigma-1} \vartheta_1^{m_1^{(\alpha)}+m_1^{(r)}} \vartheta_2^{m_2^{(\alpha)}+m_2^{(r)}} \cdots \vartheta_{2p}^{m_{2p}^{(\alpha)}+m_{2p}^{(r)}} \varphi\big(x_1^{(\alpha+r)}, x_2^{(\alpha+r)}, \dots x_p^{(\alpha+r)}\big)\end{aligned}$$

ist, und da $x^{(\alpha+r)}$, wie aus der Definition hervorgeht, zum Index $m_1^{(\alpha)} + m_1^{(r)}$ gehört, und ein Ueberschreiten der Zahl n durch diesen Index von den entsprechenden nach n congruenten kleineren Indices abgesehen nur ganze Periodicitätsmoduln hinzufügt und daher die Integralgränzen nicht ändert, so folgt

$$(10) \qquad \Psi\big(x_1^{(r)}, x_2^{(r)}, \dots x_p^{(r)}\big) = \vartheta_1^{-m_1^{(r)}} \vartheta_2^{-m_2^{(r)}} \cdots \vartheta_{2p}^{-m_{2p}^{(r)}} \Psi\big(x_1^{(0)}, x_2^{(0)} \dots x_p^{(0)}\big),$$

und daher, weil

$$\vartheta_1, \vartheta_2, \dots \vartheta_{2p}$$

n^{te} Einheitswurzeln sind,

$$\Psi^n\big(x_1^{(r)}, x_2^{(r)} \dots x_p^{(r)}\big) = \Psi^n\big(x_1^{(0)}, x_2^{(0)} \dots x_p^{(0)}\big).$$

Hieraus ergiebt sich aber, dass

$$\Psi^n\big(x_1^{(0)}, x_2^{(0)} \dots x_p^{(0)}\big) = \frac{1}{\sigma} \sum_{\alpha=0}^{\sigma-1} \Psi^n\big(x_1^{(\alpha)}, x_2^{(\alpha)} \dots x_p^{(\alpha)}\big)$$

eine rationale ganze symmetrische Function der dem Gleichungssystem (8) gemeinsamen Werthecombinationen ist und sich somit rational durch die Coefficienten dieser Gleichungen d. h. rational und ganz durch

$$\xi_1, \xi_2, \dots \xi_p, \sqrt{R(\xi_1)}, \sqrt{R(\xi_2)}, \dots \sqrt{R(\xi_p)}$$

ausdrücken lässt, und wir wollen diese Beziehung in die Form bringen

$$\Psi\big(x_1^{(0)}, x_2^{(0)} \dots x_p^{(0)}\big) = \sqrt[n]{\omega\Big(\xi_1, \xi_2, \dots \xi_p, \sqrt{R(\xi_1)}, \sqrt{R(\xi_2)}, \sqrt{R(\xi_p)}\Big)},$$

worin ω eine ganze Function der in ihr enthaltenen Grössen bedeutet, oder

$$(11)\qquad \sum_{\alpha=0}^{\sigma-1} \vartheta_1^{m_1^{(\alpha)}} \vartheta_2^{m_2^{(\alpha)}} \cdots \vartheta_{2p}^{m_{2p}^{(\alpha)}} \varphi\big(x_1^{(\alpha)}, x_2^{(\alpha)}, \dots x_p^{(\alpha)}\big) = \sqrt[n]{\omega\Big(\xi_1, \dots \xi_p, \sqrt{R(\xi_1)}, \dots \sqrt{R(\xi_p)}\Big)}.$$

Bildet man nun aus den n Lösungen

$$\vartheta_1, \vartheta_2, \dots \vartheta_n$$

der Gleichung

$$\vartheta^n = 1$$

alle möglichen Verbindungen mit Wiederholungen zur $2p^{\text{ten}}$ Klasse, deren Anzahl $n^{2p} = \sigma$ ist, und die durch

$$\begin{matrix} \vartheta_{1\,1}\ \vartheta_{2\,1} \dots \vartheta_{2p\,n} \\ \vartheta_{1\,2}\ \vartheta_{2\,2} \dots \vartheta_{2p\,2} \\ \dots\dots\dots \\ \vartheta_{1\,\sigma}\ \vartheta_{2\,\sigma} \dots \vartheta_{2p\,\sigma} \end{matrix}$$

bezeichnet werden mögen, und setzt diese der Reihe nach statt der Combination

$$\vartheta_1, \vartheta_2, \dots \vartheta_{2p}$$

in die Gleichung (11) ein, so wird sich, wenn die entsprechenden Werthe von ω mit

$$\omega_1, \omega_2, \dots \omega_\sigma$$

bezeichnet werden, das in den φ-Functionen lineare Gleichungssystem ergeben

$$
(12)\quad
\begin{aligned}
&\sum_{\alpha=0}^{\sigma-1} \vartheta_{1\,1}^{m_1^{(\alpha)}} \vartheta_{2\,1}^{m_2^{(\alpha)}} \dots \vartheta_{2p\,1}^{m_{2p}^{(\alpha)}} \varphi\big(x_1^{(\alpha)}, x_2^{(\alpha)} \dots x_p^{(\alpha)}\big) \\
&= \sqrt[n]{\omega_1\big(\xi_1, \dots \xi_p, \sqrt{R(\xi_1)}, \dots \sqrt{R(\xi_p)}\,\big)} \\
&\sum_{\alpha=0}^{\sigma-1} \vartheta_{1\,2}^{m_1^{(\alpha)}} \vartheta_{2\,2}^{m_2^{(\alpha)}} \dots \vartheta_{2p\,2}^{m_{2p}^{(\alpha)}} \varphi\big(x_1^{(\alpha)}, x_2^{(\alpha)} \dots x_p^{(\alpha)}\big) \\
&= \sqrt[n]{\omega_2\big(\xi_1, \dots \xi_p, \sqrt{R(\xi_1)}, \dots \sqrt{R(\xi_p)}\,\big)} \\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
&\sum_{\alpha=0}^{\sigma-1} \vartheta_{1\,\sigma}^{m_1^{(\alpha)}} \vartheta_{2\,\sigma}^{m_2^{(\alpha)}} \dots \vartheta_{2p\,\sigma}^{m_{2p}^{(\alpha)}} \varphi\big(x_1^{(\alpha)}, x_2^{(\alpha)} \dots x_p^{(\alpha)}\big) \\
&= \sqrt[n]{\omega_\sigma\big(\xi_1, \dots \xi_p, \sqrt{R(\xi_1)}, \dots \sqrt{R(\xi_p)}\,\big)},
\end{aligned}
$$

woraus jede der φ-Functionen als lineare Function der rechten Seiten dieser Gleichungen, also

$$
(13)\quad
\begin{aligned}
&\varphi(x_1^{(\alpha)}, x_2^{(\alpha)}, \dots x_p^{(\alpha)}) \\
&= A_1 \sqrt[n]{\omega_1\Big(\xi_1, \dots \xi_p, \sqrt{R(\xi_1)}, \dots \sqrt{R(\xi_p)}\,\Big)} \\
&+ A_2 \sqrt[n]{\omega_2\Big(\xi_1, \dots \xi_p, \sqrt{R(\xi_1)}, \dots \sqrt{R(\xi_p)}\,\Big)} \\
&+ \dots + A_\sigma \sqrt[n]{\omega_\sigma\Big(\xi_1, \dots \xi_p, \sqrt{R(\xi_1)}, \dots \sqrt{R(\xi_p)}\,\Big)}
\end{aligned}
$$

folgt.

Da aber die φ-Function irgend eine ganze symmetrische Function der in ihr enthaltenen Grössen bedeuten sollte, so ergiebt sich, dass

die Grössen

$$x_1, x_2, \dots x_p,$$

welche der Gleichung

$$\int^{x_1} \frac{f(x)\,dx}{\sqrt{R(x)}} + \dots + \int^{x_p} \frac{f(x)\,dx}{\sqrt{R(x)}} = \frac{1}{n}\int^{\xi_1} \frac{f(x)\,dx}{\sqrt{R(x)}} + \dots + \frac{1}{n}\int^{\xi_p} \frac{f(x)\,dx}{\sqrt{R(x)}}$$

genügen, die Lösungen einer Gleichung p^{ten} Grades sind, deren Coefficienten sich als lineare Functionen von n^{ten} Wurzeln aus Functionen darstellen lassen, welche rational aus

$$\xi_1, \xi_2, \ldots \xi_p, \sqrt{R(\xi_1)}, \sqrt{R(\xi_2)}, \ldots \sqrt{R(\xi_p)},$$

zusammengesetzt sind.

Es ist aber leicht zu sehen, dass sich die n^{ten} Wurzelgrössen

$$\sqrt[n]{\omega_1},\ \sqrt[n]{\omega_2}, \ldots\ \sqrt[n]{\omega_\sigma}$$

sämmtlich als rationale Functionen von $2p$ von ihnen ausdrücken lassen. Denn führt man die n^{te} Einheitswurzel

$$e^{\frac{2\pi i}{n}} = \Theta$$

ein, und setzt

$$(14)\quad \begin{aligned}
\Psi_1(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \ldots x_p^{(0)}) &= \sum_{\alpha=0}^{\sigma-1} \Theta^{m_1^{(\alpha)}} \varphi(x_1^{(\alpha)}, x_2^{(\alpha)}, \ldots x_p^{(\alpha)}) \\
&= \sqrt[n]{\omega_{\nu_1}\big(\xi_1, \ldots \xi_p, \sqrt{R(\xi_1)}, \ldots \sqrt{R(\xi_p)}\,\big)} \\
\Psi_2(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \ldots x_p^{(0)}) &= \sum_{\alpha=0}^{\sigma-1} \Theta^{m_2^{(\alpha)}} \varphi(x_1^{(\alpha)}, x_2^{(\alpha)}, \ldots x_p^{(\alpha)}) \\
&= \sqrt[n]{\omega_{\nu_2}\big(\xi_1, \ldots \xi_p, \sqrt{R(\xi_1)}, \ldots \sqrt{R(\xi_p)}\,\big)} \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\Psi_{2p}(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \ldots x_p^{(0)}) &= \sum_{\alpha=0}^{\sigma-1} \Theta^{m_{2p}^{(\alpha)}} \varphi(x_1^{(\alpha)}, x_2^{(\alpha)}, \ldots x_p^{(\alpha)}) \\
&= \sqrt[n]{\omega_{\nu_{2p}}\big(\xi_1, \ldots \xi_p, \sqrt{R(\xi_1)}, \ldots \sqrt{R(\xi_p)}\,\big)},
\end{aligned}$$

so folgen, wenn statt der Grössen

$$x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \ldots x_p^{(0)} \text{ die Werthe } x_1^{(r)}, x_2^{(r)}, \ldots x_p^{(r)}$$

substituirt werden, aus der Beziehung (10) die nachfolgenden Relationen:

$$(15)\quad \begin{aligned}
\Psi_1(x_1^{(r)}, x_2^{(r)}, \ldots x_p^{(r)}) &= \Theta^{-m_1^{(r)}} \Psi_1(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \ldots x_p^{(0)}) \\
\Psi_2(x_1^{(r)}, x_2^{(r)}, \ldots x_p^{(r)}) &= \Theta^{-m_2^{(r)}} \Psi_2(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \ldots x_p^{(0)}) \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\Psi_{2p}(x_1^{(r)}, x_2^{(r)}, \ldots x_p^{(r)}) &= \Theta^{-m_{2p}^{(r)}} \Psi_{2p}(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \ldots x_p^{(0)}).
\end{aligned}$$

Greifen wir nun irgend eine der Grössen

$$\Psi^{(\varrho)}(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \dots x_p^{(0)}) = \sum_{\alpha=0}^{\sigma-1} \vartheta_{1\,\varrho}^{m_1^{(\alpha)}} \vartheta_{2\,\varrho}^{m_2^{(\alpha)}} \cdots \vartheta_{2p\,\varrho}^{m_{2p}^{(\alpha)}} \varphi(x_1^{(\alpha)}, x_2^{(\alpha)}, \dots x_p^{(\alpha)})$$
$$= \sqrt[n]{\omega_\varrho\Big(\xi_1, \dots \xi_p, \sqrt{R(\xi_1)} \dots \sqrt{R(\xi_p)}\,\Big)}$$

heraus und setzen

$$\vartheta_{1\,\varrho} = \Theta^{t_1}, \quad \vartheta_{2\,\varrho} = \Theta^{t_2}, \dots \vartheta_{2p\,\varrho} = \Theta^{t_{2p}},$$

so wird sich ebenfalls aus der Beziehung (10) die Gleichung ergeben

(16)
$$\Psi^{(\varrho)}(x_1^{(r)}, x_2^{(r)}, \dots x_p^{(r)})$$
$$= \Theta^{-(t_1 m_1^{(r)} + t_2 m_2^{(r)} + \dots + t_{2p} m_{2p}^{(r)})} \Psi^{(\varrho)}(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \dots x_1^{(0)}),$$

und somit aus (15) und (16) die Relation folgen

(17)
$$\frac{\Psi^{(\varrho)}(x_1^{(r)}, x_2^{(r)}, \dots x_p^{(r)})}{\Psi_1^{t_1}(x_1^{(r)}, x_2^{(r)}, \dots x_p^{(r)})\, \Psi_2^{t_2}(x_1^{(r)}, x_2^{(r)}, \dots x_p^{(r)}) \dots \Psi_{2p}^{t_{2p}}(x_1^{(r)}, x_2^{(r)}, \dots x_p^{(r)})}$$
$$= \frac{\Psi^{(\varrho)}(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \dots x_p^{(0)})}{\Psi_1^{t_1}(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \dots x_p^{(0)})\, \Psi_2^{t_2}(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \dots x_p^{(0)}) \dots \Psi_{2p}^{t_{2p}}(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \dots x_p^{(0)})}.$$

Beachtet man endlich, dass hiernach die rechte Seite der letzteren Gleichung, welche in die Form

$$\frac{1}{\sigma} \sum_{\alpha=0}^{\sigma-1} \frac{\Psi^{(\varrho)}(x_1^{(\alpha)}, x_2^{(\alpha)}, \dots x_p^{(\alpha)})}{\Psi_1^{t_1}(x_1^{(\alpha)}, x_2^{(\alpha)}, \dots x_p^{(\alpha)})\, \Psi_2^{t_2}(x_1^{(\alpha)}, x_2^{(\alpha)}, \dots x_p^{(\alpha)}) \dots \Psi_{2p}^{t_{2p}}(x_1^{(\alpha)}, x_2^{(\alpha)}, \dots x_p^{(\alpha)})}$$

gesetzt werden kann, wieder eine rationale symmetrische Function der gemeinsamen Wurzelcombinationen des Gleichungssystems (8) ist, sich also rational durch die Grössen

$$\xi_1, \xi_2, \dots \xi_p, \sqrt{R(\xi_1)}, \sqrt{R(\xi_2)}, \dots \sqrt{R(\xi_p)}$$

ausdrücken lässt, so folgt, wenn dieser Ausdruck durch

$$\Omega^{(\varrho)}\Big(\xi_1, \xi_2, \dots \xi_p, \sqrt{R(\xi_1)}, \sqrt{R(\xi_2)}, \dots \sqrt{R(\xi_p)}\,\Big)$$

bezeichnet und für die Ψ-Functionen wieder die n^{ten} Wurzeln aus den ω-Grössen gesetzt werden, die Beziehung

$$\sqrt[n]{\omega_\varrho\Big(\xi_1, \ldots \xi_p, \sqrt{R(\xi_1)}, \ldots \sqrt{R(\xi_p)}\Big)} = \Omega^{(\varrho)}\Big(\xi_1, \ldots \xi_p, \sqrt{R(\xi_1)}, \ldots \sqrt{R(\xi_p)}\Big)$$
$$\times \left[\sqrt[n]{\omega_{\nu_1}\Big(\xi_1, \ldots \xi_p, \sqrt{R(\xi_1)}, \ldots \sqrt{R(\xi_p)}\Big)}\right]^{t_1}$$
$$\times \left[\sqrt[n]{\omega_{\nu_2}\Big(\xi_1, \ldots \xi_p, \sqrt{R(\xi_1)}, \ldots \sqrt{R(\xi_p)}\Big)}\right]^{t_2} \cdots$$
$$\times \left[\sqrt[n]{\omega_{\nu_{2p}}\Big(\xi_1, \ldots \xi_p, \sqrt{R(\xi_1)}, \ldots \sqrt{R(\xi_p)}\Big)}\right]^{t_{2p}}$$

und es ist somit gezeigt, dass sich sämmtliche n^{ten} Wurzeln, welche in den Coefficienten der Theilungsgleichung vorkommen, rational durch $2p$ dieser n^{ten} Wurzeln ausdrücken lassen, und daher jeder dieser letzteren n^{ten} Wurzeln in den Gleichungen (12) alle Werthe beigelegt werden können; es ergeben sich aus allen Combinationen die verlangten n^{2p} Wurzelwerthe.

In die Auflösung dieser Theilungsgleichungen traten, wie aus der obigen Auseinandersetzung ersichtlich, die Grössen $\eta_1, \eta_2, \ldots \eta_p$ und die zu ihnen gehörigen Irrationalitäten ein, welche durch die Gleichung definirt waren

(18)
$$m_1 J_{a_1} + m_2 J_{a_2} + \cdots + m_p J_{a_p} + m_{p+1} J_{b_1} + m_{p+2} J_{b_2} + \cdots + m_{2p} J_{b_p}$$
$$= n \int^{\eta_1} \frac{f(x)\,dx}{\sqrt{R(x)}} + n \int^{\eta_2} \frac{f(x)\,dx}{\sqrt{R(x)}} + \cdots + n \int^{\eta_p} \frac{f(x)\,dx}{\sqrt{R(x)}},$$

und mit den besonderen Eigenschaften dieser Grössen wollen wir uns nunmehr beschäftigen.

Sei

$$n = q^\varkappa r^\varrho \cdots s^\sigma,$$

worin $q, r, \ldots s$ verschiedene Primzahlen bedeuten, so wird man die Gleichungen

$$\frac{m_1}{n} = \frac{m_1^{(1)}}{q^\varkappa} + \frac{m_1^{(2)}}{r^\varrho} + \cdots + \frac{m_1^{(\delta)}}{s^\sigma}$$
$$\frac{m_2}{n} = \frac{m_2^{(1)}}{q^\varkappa} + \frac{m_2^{(2)}}{r^\varrho} + \cdots + \frac{m_2^{(\delta)}}{s^\sigma}$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\frac{m_{2p}}{n} = \frac{m_{2p}^{(1)}}{q^\varkappa} + \frac{m_{2p}^{(2)}}{r^\varrho} + \cdots + \frac{m_{2p}^{(\delta)}}{s^\sigma}$$

bekanntlich durch ganze Zahlen so befriedigen können, dass die Brüche sämmtlich ächte sind, und wenn man dann im Stande ist, die einzelnen durch die Gleichungen

$$
(19)\qquad
\begin{aligned}
&m_1^{(1)} J_{a_1} + m_2^{(1)} J_{a_2} + \cdots + m_{2p}^{(1)} J_{b_p} = q^\varkappa \int^{\eta_1^{(1)}} \frac{f(x)\,dx}{\sqrt{R(x)}} + \cdots + q^\varkappa \int^{\eta_p^{(1)}} \frac{f(x)\,dx}{\sqrt{R(x)}}\\
&m_1^{(2)} J_{a_1} + m_2^{(2)} J_{a_2} + \cdots + m_{2p}^{(2)} J_{b_p} = r^\varrho \int^{\eta_1^{(2)}} \frac{f(x)\,dx}{\sqrt{R(x)}} + \cdots + r^\varrho \int^{\eta_p^{(2)}} \frac{f(x)\,dx}{\sqrt{R(x)}}\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&m_1^{(\delta)} J_{a_1} + m_2^{(\delta)} J_{a_2} + \cdots + m_{2p}^{(\delta)} J_{b_p} = s^\sigma \int^{\eta_1^{(\delta)}} \frac{f(x)\,dx}{\sqrt{R(x)}} + \cdots + s^\sigma \int^{\eta_p^{(\delta)}} \frac{f(x)\,dx}{\sqrt{R(x)}}
\end{aligned}
$$

definirten Divisionsprobleme der ganzen Vielfachen der Periodicitätsmoduln zu lösen, so wird die Addition aller Gleichungen

$$
\begin{aligned}
&\frac{m_1}{n} J_{a_1} + \frac{m_2}{n} J_{a_2} + \cdots + \frac{m_p}{n} J_{a_p} + \frac{m_{p+1}}{n} J_{b_2} + \cdots + \frac{m_{2p}}{n} J_{b_p}\\
&= \int^{\eta_1^{(1)}} \frac{f(x)\,dx}{\sqrt{R(x)}} + \cdots + \int^{\eta_p^{(1)}} \frac{f(x)\,dx}{\sqrt{R(x)}} + \int^{\eta_1^{(2)}} \frac{f(x)\,dx}{\sqrt{R(x)}} + \cdots + \int^{\eta_p^{(2)}} \frac{f(x)\,dx}{\sqrt{R(x)}}\\
&\qquad + \cdots + \int^{\eta_1^{(\delta)}} \frac{f(x)\,dx}{\sqrt{R(x)}} + \cdots + \int^{\eta_p^{(\delta)}} \frac{f(x)\,dx}{\sqrt{R(x)}}
\end{aligned}
$$

liefern; wenn dann nach dem Abel'schen Theorem die δp Integrale der rechten Seite zu p Integralen vereinigt werden, so dass

$$
\begin{aligned}
&\int^{\eta_1^{(1)}} \frac{f(x)\,dx}{\sqrt{R(x)}} + \cdots + \int^{\eta_p^{(1)}} \frac{f(x)\,dx}{\sqrt{R(x)}} + \cdots + \int^{\eta_1^{(\delta)}} \frac{f(x)\,dx}{\sqrt{R(x)}} + \cdots + \int^{\eta_p^{(\delta)}} \frac{f(x)\,dx}{\sqrt{R(x)}}\\
&\qquad = \int^{\eta_1} \frac{f(x)\,dx}{\sqrt{R(x)}} + \int^{\eta_2} \frac{f(x)\,dx}{\sqrt{R(x)}} + \cdots + \int^{\eta_p} \frac{f(x)\,dx}{\sqrt{R(x)}}
\end{aligned}
$$

wird, worin $\eta_1, \eta_2 \dots \eta_p$ Lösungen einer Gleichung p^{ten} Grades bedeuten, deren Coefficienten rational und symmetrisch aus

$$
\eta_1^{(1)}, \sqrt{R(\eta_1^{(1)})};\ \eta_2^{(1)}, \sqrt{R(\eta_2^{(1)})}; \dots \eta_1^{(\delta)}, \sqrt{R(\eta_1^{(\delta)})}; \dots \eta_p^{(\delta)}, \sqrt{R(\eta_p^{(\delta)})}
$$

zusammengesetzt sind, so wird das in der Gleichung (18) gestellte Problem gelöst sein.

Wir haben uns daher nur mit einer der Gleichungen (19) d. h. mit dem Divisionsproblem der Perioden für eine Primzahlpotenz zu beschäftigen; aber es genügt, das Problem für eine einfache Primzahl zu behandeln. Denn sei dasselbe für eine einfache Primzahl gelöst, welche der Gleichung angehört

$$
(20)\qquad m_1^{(1)} J_{a_1} + \cdots + m_{2p}^{(1)} J_{b_p} = q \int^{\zeta_1} \frac{f(x)\,dx}{\sqrt{R(x)}} + \cdots + q \int^{\zeta_p} \frac{f(x)\,dx}{\sqrt{R(x)}}
$$

so wird, wenn

$$(21) \qquad \int^{\zeta_1} \frac{f(x)\,dx}{\sqrt{R(x)}} + \cdots + \int^{\zeta_p} \frac{f(x)\,dx}{\sqrt{R(x)}} = q \int^{\zeta_1^{(1)}} \frac{f(x)\,dx}{\sqrt{R(x)}} + \cdots + q \int^{\zeta_p^{(1)}} \frac{f(x)\,dx}{\sqrt{R(x)}}$$

gesetzt wird,

$$(22) \qquad m_1 J_{a_1} + \cdots + m_{2p} J_{b_p} = q^2 \int^{\zeta_1^{(1)}} \frac{f(x)\,dx}{\sqrt{R(x)}} + \cdots + q^2 \int^{\zeta_p^{(1)}} \frac{f(x)\,dx}{\sqrt{R(x)}}$$

hervorgehen; aber die Auflösung des durch die Gleichung (21) definirten Problems ist nach den früheren Auseinandersetzungen durch q^{te} Wurzeln herstellbar, wenn wiederum das Problem der Gleichung (20) als gelöst betrachtet wird; schliesst man so weiter, so ergiebt sich, dass das in Gleichung (18) gestellte Problem nur für den Fall, dass n eine einfache Primzahl ist, zu behandeln sein wird.

Führt man der Einfachheit der Bezeichnung wegen für die $2p$ Periodicitätsmoduln die Grössen

$$J_1, J_2, \ldots J_{2p}$$

ein und setzt

$$(23) \qquad \begin{aligned} i_1 &= J_1 \\ i_2 &= \mu_1 J_1 + J_2 \\ i_3 &= \mu_1 J_1 + \mu_2 J_2 + J_3 \\ &\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\ i_{2p} &= \mu_1 J_1 + \mu_2 J_2 + \cdots + \mu_{2p-1} J_{2p-1} + J_{2p}, \end{aligned}$$

worin die Grössen

$$\mu_1, \ \mu_2, \ \ldots \mu_{2p}$$

Zahlen ans der Reihe $0, \ 1, \ 2, \ \ldots n-1$ bedeuten sollen, so erkennt man sogleich, dass sich für jede Werthecombination der Grössen

$$m_1, \ m_2, \ \ldots m_{2p}$$

eine Beziehung von der Form aufstellen lässt

$$(24) \qquad m_1 J_1 + \cdots m_{2p} J_{2p} = m i_r + n(k_1 J_1 + \cdots + k_{2p} J_{2p});$$

denn wird die letzte nicht verschwindende m-Grösse mit m_k bezeichnet, so setze man $r = k$, stelle die Relationen auf

$$m = m_k, \ m\mu_{k-1} \equiv m_{k-1} \pmod n, \ m\mu_{k-2} \equiv m_{k-2} \pmod n, \ldots m\mu_1 \equiv m_1 \pmod n$$

und bestimme, was, weil n eine Primzahl, stets möglich ist, hieraus die Grössen $\mu_1,\ \mu_2,\ \dots \mu_{k-1}$.

Dadurch ist aber gezeigt, dass der Ausdruck

$$\frac{m_1}{n} J_1 + \frac{m_2}{n} J_2 + \cdots + \frac{m_{2p}}{n} J_{2p}$$

sich von dem Ausdrucke

$$m\left(\frac{\mu_1}{n} J_1 + \frac{\mu_2}{n} J_2 + \cdots + \frac{\mu_{k-1}}{n} J_{k-1} + \frac{1}{n} J_k\right)$$

nur um ganze Vielfache der Periodicitätsmoduln unterscheiden wird, und somit statt der Gleichung (18) die Beziehung

$$\begin{aligned}(25) \qquad & m\left(\frac{\mu_1}{n} J_1 + \frac{\mu_2}{n} J_2 + \cdots + \frac{\mu_{k-1}}{n} J_{k-1} + \frac{1}{n} J_k\right) \\ &= \int^{\eta_1} \frac{f(x)\,dx}{\sqrt{R(x)}} + \int^{\eta_2} \frac{f(x)\,dx}{\sqrt{R(x)}} + \cdots + \int^{\eta_p} \frac{f(x)\,dx}{\sqrt{R(x)}}\end{aligned}$$

zu Grunde gelegt werden kann, in welcher k jeden Werth von 1 bis $2p$ bedeuten darf, die Grössen $\mu_1,\ \mu_2,\ \dots \mu_{k-1}$ alle Zahlen $0,\ 1,\ 2,\ \dots n-1$ vorstellen und m aus der Werthereihe $1,\ 2,\ \dots n-1$ zu nehmen ist.

Seien jetzt in Gleichung (25) k sowohl wie die Werthe $\mu_1,\ \mu_2,\ \dots \mu_{k-1}$ beliebig, aber fest gewählt, und werde, wenn ϱ eine primitive Wurzel der Primzahl n bedeutet,

$$m = \varrho^t$$

gesetzt, so bilde man ähnlich, wie oben im allgemeinen Divisionsproblem geschehen, wenn ϑ eine $n-1^{\text{te}}$ Einheitswurzel bedeutet, ferner durch

$$\eta_1^{(t)},\ \eta_2^{(t)},\ \dots \eta_p^{(t)}$$

die Integralgränzen in Gleichung (25) bezeichnet werden, welche bei der bestimmt getroffenen Wahl von k und $\mu_1,\ \mu_2,\ \dots \mu_{k-1}$ zu dem Werthe t gehören, endlich

$$\varphi(\eta_1^{(t)},\ \eta_2^{(t)},\ \dots \eta_p^{(t)})$$

eine ganze symmetrische Function der Grössen $\eta_1^{(t)},\ \eta_2^{(t)},\ \dots \eta_p^{(t)}$ vorstellt, die Summe

$$\text{(g)} \qquad \sum_{t=0}^{n-2} \vartheta^t \varphi(\eta_1^{(t)}, \eta_2^{(t)}, \dots \eta_p^{(t)}).$$

Es ist unmittelbar einzusehen, dass, weil

$$\int^{\eta_1^{(t)}} \frac{f(x)\,dx}{\sqrt{R(x)}} + \cdots + \int^{\eta_p^{(t)}} \frac{f(x)\,dx}{\sqrt{R(x)}} = \varrho^t \int^{\eta_1^{(0)}} \frac{f(x)\,dx}{\sqrt{R(x)}} + \cdots + \varrho^t \int^{\eta_p^{(0)}} \frac{f(x)\,dx}{\sqrt{R(x)}}$$

ist, die Grössen

$$\eta_1^{(t)},\ \eta_2^{(t)},\ \ldots \eta_p^{(t)},$$

die Lösungen einer algebraischen Gleichung sind, deren Coefficienten rational aus

$$\eta_1^{(0)},\ \eta_2^{(0)},\ \ldots \eta_p^{(0)}, \sqrt{R(\eta_1^{(0)})}, \sqrt{R(\eta_2^{(0)})}, \ldots \sqrt{R(\eta_p^{(0)})},$$

zusammengesetzt sind, und dass somit auch

$$\varphi(\eta_1^{(t)},\ \eta_2^{(t)},\ \ldots \eta_p^{(t)})$$

als ganze symmetrische Function der in ihr enthaltenen Grössen ebenso ausdrückbar ist; beachtet man aber, dass, wenn

$$\mu_1 J_1 + \cdots + \mu_{k-1} J_{k-1} + J_k = \int^{H_1} \frac{f(x)\,dx}{\sqrt{R(x)}} + \cdots + \int^{H_p} \frac{f(x)\,dx}{\sqrt{R(x)}}$$

gesetzt wird,

$$n \int^{\eta_1^{(0)}} \frac{f(x)\,dx}{\sqrt{R(x)}} + \cdots + n \int^{\eta_p^{(0)}} \frac{f(x)\,dx}{\sqrt{R(x)}} = \int^{H_1} \frac{f(x)\,dx}{\sqrt{R(x)}} + \cdots + \int^{H_p} \frac{f(x)\,dx}{\sqrt{R(x)}}$$

wird, und daher, wie oben hervorgehoben, die Irrationalitäten

$$\sqrt{R(\eta_1^{(0)})}, \sqrt{R(\eta_2^{(0)})}, \ldots \sqrt{R(\eta_p^{(0)})}$$

aus den betrachteten Ausdrücken in rationaler Weise herausgeschafft werden können, so folgt, dass

$$\varphi(\eta_1^{(t)},\ \eta_2^{(t)},\ \ldots \eta_p^{(t)})$$

und somit auch die Summe (g) sich als rationale Function der Grössen

$$\eta_1^{(0)},\ \eta_2^{(0)},\ \ldots \eta_p^{(0)}$$

wird darstellen lassen, wesshalb wir

$$(26) \qquad \sum_{t=0}^{n-2} \vartheta^t \varphi(\eta_1^{(t)}, \eta_2^{(t)}, \ldots \eta_p^{(t)}) = \psi(\eta_1^{(0)}, \eta_2^{(0)}, \ldots \eta_p^{(0)})$$

setzen wollen.

Nun können wir aber ebenso wie im allgemeinen Divisionsproblem die charakteristische Eigenschaft dieser ψ-Function ermitteln; setzt man nämlich an Stelle der Grössen $\eta_1^{(0)},\ \eta_2^{(0)},\ \dots \eta_p^{(0)}$ die Werthe

$$\eta_1^{(\tau)},\ \eta_2^{(\tau)},\ \dots \eta_p^{(\tau)},$$

so wird

$$\psi(\eta_1^{(\tau)}, \eta_2^{(\tau)}, \dots \eta_p^{(\tau)}) = \sum_{t=0}^{n-2} \vartheta^t \varphi(\eta_1^{(t+\tau)}, \eta_2^{(t+\tau)}, \dots \eta_p^{(t+\tau)})$$

$$= \vartheta^{-\tau} \sum_{t=0}^{n-2} \vartheta^{t+\tau} \varphi(\eta_1^{(t+\tau)}, \eta_2^{(t+\tau)}, \dots \eta_p^{(t+\tau)}) = \vartheta^{-\tau} \psi(\eta_1^{(0)}, \eta_2^{(0)}, \dots \eta_p^{(0)}),$$

und somit, weil ϑ eine $n-1^{\text{te}}$ Einheitswurzel ist,

$$\psi(\eta_1^{(\tau)}, \eta_2^{(\tau)}, \dots \eta_p^{(\tau)})^{n-1} = \psi(\eta_1^{(0)}, \eta_2^{(0)}, \dots \eta_p^{(0)})^{n-1}. \tag{27}$$

Die in dieser Relation vorkommenden η-Werthe unterscheiden sich nur durch die verschiedenen Werthe der Grösse m in der Gleichung (25), während die Werthe k und $\mu_1,\ \mu_2,\ \dots \mu_{k-1}$ dieselben bleiben; lässt man die letzteren Grössen alle möglichen verschiedenen Werthe annehmen, deren Anzahl, wie unmittelbar aus dem Gleichungssystem (23) zu erkennen,

$$h = 1 + n + n^2 + \dots + n^{2p-1} = \frac{n^{2p}-1}{n-1}$$

Verbindungen liefern wird, so wird man im Ganzen für alle Verbindungen der m und μ h verschiedene Werthe der Function

$$\Psi_a = \psi(\eta_1,\ \eta_2,\ \dots \eta_p)^{n-1}$$

erhalten. Bildet man nun eine algebraische Gleichung mit den Lösungen

$$\Psi_1,\ \Psi_2,\ \dots \Psi_h,$$

so werden die Coefficienten ganze rationale symmetrische Functionen aller η-Werthe sein, d. h. symmetrische Functionen der gemeinsamen Werthecombinationen des Gleichungssystems (8), wenn für die Grössen ξ die Verzweigungswerthe gesetzt werden, also durch die Coefficienten jenes Gleichungssystems für diesen Fall ausdrückbar sein.

Wird nun diese im Allgemeinen nicht algebraisch auflösbare Gleichung als aufgelöst betrachtet, und eine ihrer Lösungen durch

$$Z$$

bezeichnet, so dass

$$\sum_{t=0}^{n-2} \vartheta^t \varphi(\eta_1^{(t)}, \eta_2^{(t)}, \ldots \eta_p^{(t)}) = \sqrt[n-1]{Z}$$

wird, so folgt unmittelbar, wenn man für ϑ sämmtliche $n-1^{\text{te}}$ Einheitswurzeln setzt, die zugehörigen Werthe von Z mit

$$Z_1,\ Z_2,\ \ldots Z_{n-1}$$

bezeichnet und alle Gleichungen addirt, die Gleichung

$$(28) \qquad (n-1)\varphi(\eta_1^{(0)}, \eta_2^{(0)}, \ldots \eta_p^{(0)}) = \sqrt[n-1]{Z_1} + \sqrt[n-1]{Z_2} + \cdots + \sqrt[n-1]{Z_{n-1}},$$

und man kann somit, wenn man jene Gleichung h^{ten} Grades als aufgelöst betrachtet, die Coefficienten der verschiedenen Gleichungen p^{ten} Grades bilden, deren Lösungen die Werthe

$$\eta_1,\ \eta_2,\ \ldots \eta_p \text{ sind.}$$

Es mag endlich noch bemerkt werden, dass nach der Beziehung

$$\psi(\eta_1^{(\tau)},\ \eta_2^{(\tau)},\ \ldots \eta_p^{(\tau)}) = \vartheta^{-\tau}\psi(\eta_1^{(0)},\ \eta_2^{(0)},\ \ldots \eta_p^{(0)})$$

für diejenige Function

$$\psi^{(k)}(\eta_1,\ \eta_2,\ \ldots \eta_p),$$

welche, wenn

$$\vartheta = e^{\frac{2i\pi}{n-1}}$$

gesetzt wird, der $n-1^{\text{ten}}$ Einheitswurzel ϑ^k entspricht, die analoge Relation

$$\psi^{(k)}(\eta_1^{(\tau)},\ \eta_2^{(\tau)}, \ldots \eta_p^{(\tau)}) = \vartheta^{-k\tau}\psi^{(k)}(\eta_1^{(0)}, \eta_2^{(0)}, \ldots \eta_p^{(0)})$$

besteht, und somit

$$\frac{\psi^{(k)}(\eta_1^{(\tau)}, \eta_2^{(\tau)}, \ldots \eta_p^{(\tau)})}{\left[\psi(\eta_1^{(\tau)}, \eta_2^{(\tau)}, \ldots \eta_p^{(\tau)})\right]^k} = \frac{\psi^{(k)}(\eta_1^{(0)}, \eta_2^{(0)}, \ldots \eta_p^{(0)})}{\left[\psi(\eta_1^{(0)}, \eta_2^{(0)}, \ldots \eta_p^{(0)})\right]^k}$$

ist, woraus wieder genau, wie oben im allgemeinen Divisionsproblem, hervorgeht, dass

$$\sqrt[n-1]{Z_k} = \left[\sqrt[n-1]{Z_1}\right]^k F,$$

worin F rational aus den Coefficienten der Gleichung (8) in unserm speciellen Falle zusammengesetzt ist, und somit werden in der Gleichung (28) der allein in derselben vorkommenden Irrationalität $\sqrt[n-1]{Z_1}$ alle $n-1$ verschiedenen Werthe beizulegen sein.

Anmerkungen der Korrekturleser

Folgende Änderungen wurden u. a. in der Gutenberg-Fassung vorgenommen:

- 4. Vorlesung, Gleichung (4) wurde auf mehrere Zeilen verteilt, einmal fehlte der Zähler $F(t)$ im Original
- 5. Vorlesung, unterste Gleichung auf Originalseite 69 (Fall I $\alpha \geq \beta$): Letzter Term muss $M_{2\alpha+1}$ heißen
- 5. Vorlesung, Originalseite 81 Mitte: erster Term muss $(2\beta+1)P'_{2\beta+1}M_{2\beta+1}$ heißen
- 6. Vorlesung, Originalseite 88, Ausdruck vor Gleichung (23): Nenner des letzten Terms lautete im Original $(z_\alpha - c_)(z' - c_1)$
- 7. Vorlesung, Originalseite 114, zweite Teilgleichung von Gl. (30): Letzter Term lautete im Original $y_1^{\kappa-1}$
- 8. Vorlesung, Originalseite 116, Gl. (34): Vorletzter Term lautete im Original $(y-y_2)$
- 9. Vorlesung, Originalseite 167, Ausdruck Wurzelgrössen vor Gl. (14): Letzter Term lautete im Original $\sqrt[n]{\omega}$